TS. NGUYỄN VĂN NHÂN
ThS. PHẠM HỒNG DANH - TRẦN MINH QUANG

BÀI TẬP TOÁN

ĐẠI SỐ TỔ HỢP

- DÀNH CHO HỌC SINH LUYỆN THI TÚ TÀI VÀ TUYỂN SINH VÀO CÁC TRƯỜNG ĐH & CĐ
- 152 ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN CÁC ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐH TỪ NĂM 1997 ĐẾN NAY



Hà Nội NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TS. NGUYỄN VĂN NHÂN
ThS. PHẠM HỒNG DANH – TRẦN MINH QUANG

BÀI TẬP TOÁN
ĐẠI SỐ TỔ HỢP

- DÀNH CHO HỌC SINH LUYỆN THI TÚ TÀI VÀ TUYỂN SINH VÀO CÁC TRƯỜNG ĐH & CĐ.
- 152 ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN CÁC ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC TỪ NĂM 1997 ĐẾN NAY.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Đếm là diệu tưởng

Đo là nghi tâm

(Thơ Bùi Giáng)

Lời nói đầu

Đại số tổ hợp là một môn học khó. Các bài toán dễ sai khi xét thiếu tình huống, xét tình huống bị trùng lặp hay không thấy được đây là bài toán chỉnh hợp hay tổ hợp.

Mục đích cuốn sách này là giúp các em học sinh vượt qua các khó khăn vừa nêu trên, góp phần giúp các em đạt kết quả tốt trong kì thi Tú tài và tuyển sinh vào trường Đại học hay Cao đẳng. Cuốn sách này gồm 5 chương : phép đếm, hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp và nhị thức Newton.

Trong mỗi chương, phần đầu là phần giáo khoa và các ví dụ đơn giản để học sinh nắm bắt được khái niệm cơ bản, chuẩn bị cho việc vận dụng vào bài tập. Phần sau là bài tập thường được lấy từ các đề thi tuyển sinh, mà lời giải được trình bày rất chi tiết để giúp các em có thể tự học. Chúng tôi còn để lại các bài tập tương tự có đáp số để các em tự kiểm tra mức độ tiếp thu.

Cuối cùng, chắc chắn cuốn sách này không thể tránh được sai sót. Xin bạn đọc góp ý, chúng tôi rất cám ơn.

CÁC TÁC GIẢ

Chương I

QUY TẮC CƠ BẢN CỦA PHÉP ĐẾM

Môn đại số tổ hợp (có sách gọi là giải tích tổ hợp) chuyên khảo sát các hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp, nhằm xác định số cách xảy ra một hiện tượng nào đó mà không nhất thiết phải liệt kê từng trường hợp.

1. Trong đại số tổ hợp, ta thường dùng hai quy tắc cơ bản của phép đếm, đó là quy tắc cộng và quy tắc nhân.

a) **Quy tắc cộng :**

Nếu hiện tượng 1 có m cách xảy ra, hiện tượng 2 có n cách xảy ra và hai hiện tượng này không xảy ra đồng thời thì số cách xảy ra hiện tượng này hay hiện tượng kia là : $m + n$ cách.

Ví dụ 1. Từ thành phố A đến thành phố B có 3 đường bộ và 2 đường thủy. Cần chọn một đường để đi từ A đến B. Hỏi có mấy cách chọn ?

Giải

Có : $3 + 2 = 5$ cách chọn.

Ví dụ 2. Một nhà hàng có 3 loại rượu, 4 loại bia và 6 loại nước ngọt. Thực khách cần chọn đúng 1 loại thức uống. Hỏi có mấy cách chọn ?

Giải

Có : $3 + 4 + 6 = 13$ cách chọn.

b) **Quy tắc nhân :**

Nếu hiện tượng 1 có m cách xảy ra, ứng với mỗi cách xảy ra hiện tượng 1 rồi tiếp đến hiện tượng 2 có n cách xảy ra thì số cách xảy ra hiện tượng 1 "rồi" hiện tượng 2 là : $m \times n$.

Ví dụ 1. Giữa thành phố Hồ Chí Minh và Hà Nội có 3 loại phương tiện giao thông : đường bộ, đường sắt và đường hàng không. Hỏi có mấy cách chọn phương tiện giao thông để đi từ thành phố Hồ Chí Minh đến Hà Nội rồi quay về ?

Giải

Có : $3 \times 3 = 9$ cách chọn.

Ví dụ 2. Một hội đồng nhân dân có 15 người, cần bầu ra 1 chủ tịch, 1 phó chủ tịch, 1 ủy viên thư ký và không được bầu 1 người vào 2 hay 3 chức vụ. Hỏi có mấy cách ?

Giải

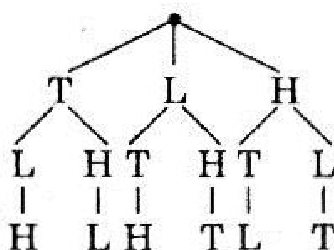
Có 15 cách chọn chủ tịch. Với mỗi cách chọn chủ tịch, có 14 cách chọn phó chủ tịch. Với mỗi cách chọn chủ tịch và phó chủ tịch, có 13 cách chọn thư ký.

Vậy có : $15 \times 14 \times 13 = 2730$ cách chọn.

2. Sơ đồ cây

Người ta dùng sơ đồ cây để liệt kê các trường hợp xảy ra đối với các bài toán có ít hiện tượng liên tiếp và mỗi hiện tượng có ít trường hợp. Chú ý ta chỉ dùng sơ đồ cây để kiểm tra kết quả.

Ví dụ. Trong một lớp học, thầy giáo muốn biết trong ba môn Toán, Lý, Hóa học sinh thích môn nào theo thứ tự giảm dần. Số cách mà học sinh có thể ghi là :



3. Các dấu hiệu chia hết

- Chia hết cho 2 : số tận cùng là 0, 2, 4, 6, 8.
- Chia hết cho 3 : tổng các chữ số chia hết cho 3 (ví dụ : 276).
- Chia hết cho 4 : số tận cùng là 00 hay hai chữ số cuối hợp thành số chia hết cho 4 (ví dụ : 1300, 2512, 708).
- Chia hết cho 5 : số tận cùng là 0, 5.
- Chia hết cho 6 : số chia hết cho 2 và chia hết cho 3.
- Chia hết cho 8 : số tận cùng là 000 hay ba chữ số cuối hợp thành số chia hết cho 8 (ví dụ : 15000, 2016, 13824).
- Chia hết cho 9 : tổng các chữ số chia hết cho 9 (ví dụ : 2835).
- Chia hết cho 25 : số tận cùng là 00, 25, 50, 75.
- Chia hết cho 10 : số tận cùng là 0.

Ví dụ. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 3 chữ số đôi một khác nhau, không chia hết cho 9.

Giải

Gọi : $n = \overline{abc}$ là số cần lập.

$m = \overline{a'b'c'}$ là số gồm 3 chữ số khác nhau.

$m' = \overline{a_1b_1c_1}$ là số gồm 3 chữ số khác nhau mà chia hết cho 9.

Ta có : $n = m - m'$

* Tìm m : có 5 cách chọn a' (vì $a' \neq 0$), có 5 cách chọn b' (vì $b' \neq a'$), có 4 cách chọn c' (vì $c' \neq a'$ và $c' \neq b'$). Vậy có :

$$5 \times 5 \times 4 = 100 \text{ số m.}$$

* Tìm m' : trong các chữ số đã cho, 3 chữ số có tổng chia hết cho 9 là {0, 4, 5}, {1, 3, 5}, {2, 3, 4}.

- Với {0, 4, 5} : có 2 cách chọn a_1, 2 cách chọn b_1, 1 cách chọn c_1, được

$$2 \times 2 \times 1 = 4 \text{ số m'}.$$

- Với {1, 3, 5} : có 3! = 6 số m'
- Với {2, 3, 4} : có 3! = 6 số m'.

Vậy có : $4 + 6 + 6 = 16$ số m'.

Suy ra có : $100 - 16 = 84$ số n.

Chú ý : Qua ví dụ trên, ta thấy nếu số cách chọn thỏa tính chất p nào đó quá nhiều, ta có thể làm như sau :

Số cách chọn thỏa p bằng số cách chọn tùy ý trừ số cách chọn không thỏa p.

Người ta còn gọi cách làm này là dùng "phần bù".

Bài 1. Có 4 tuyến xe buýt giữa A và B. Có 3 tuyến xe buýt giữa B và C. Hỏi :

a) Có mấy cách đi bằng xe buýt từ A đến C, qua B ?

b) Có mấy cách đi rồi về bằng xe buýt từ A đến C, qua B ?

c) Có mấy cách đi rồi về bằng xe buýt từ A đến C, qua B sao cho mỗi tuyến xe buýt không đi quá một lần ?

Giải

a) Có 4 cách đi từ A đến B, có 3 cách đi từ B đến C. Do đó, theo quy tắc nhân, có 4.3 = 12 cách đi từ A đến C, qua B.

b) Có 12 cách đi từ A đến C, qua B và có 12 cách quay về. Vậy, có :

$12 \times 12 = 144$ cách đi rồi về từ A đến C, qua B.

c) Có 4 cách đi từ A đến B, có 3 cách đi từ B đến C; để tránh đi lại đường cũ, chỉ có 2 cách từ C quay về B và 3 cách từ B quay về A.

Vậy, có : $4.3.2.3 = 72$ cách. ■

Bài 2. Một văn phòng cần chọn mua một tờ nhật báo mỗi ngày. Có 4 loại nhật báo. Hỏi có mấy cách chọn mua báo cho một tuần gồm 6 ngày làm việc ?

Giải

Có 4 cách chọn cho mỗi ngày. Vậy, số cách chọn cho 6 ngày trong tuần là : $4^6 = 4096$ cách. ■

Bài 3. Trong một tuần, Bảo định mỗi tối đi thăm 1 người bạn trong 12 người bạn của mình. Hỏi Bảo có thể lập được bao nhiêu kế hoạch đi thăm bạn nếu :

a) Có thể thăm 1 bạn nhiều lần ?

b) Không đến thăm 1 bạn quá 1 lần ?

Giải

a) Đêm thứ nhất, chọn 1 trong 12 bạn để đến thăm : có 12 cách. Tương tự, cho đêm thứ hai, thứ ba, thứ tư, thứ năm, thứ sáu, thứ bảy.

Vậy, có : $12^7 = 35831808$ cách.

b) Đêm thứ nhất, chọn 1 trong 12 bạn để đến thăm : có 12 cách. Đêm thứ hai, chọn 1 trong 11 bạn còn lại để đến thăm : có 11 cách. Đêm thứ ba : 10 cách. Đêm thứ tư : 9 cách. Đêm thứ năm : 8 cách. Đêm thứ sáu : 7 cách. Đêm thứ bảy : 6 cách.

Vậy có : $12.11.10.9.8.7.6 = 3991680$ cách. ■

Bài 4. Một tuyến đường xe lửa có 10 nhà ga. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một cuộc hành trình bắt đầu ở 1 nhà ga và chấm dứt ở 1 nhà ga khác, biết rằng từ nhà ga nào cũng co thể đi tới bất kì nhà ga khác ?

Giải

Nhà ga đi : có 10 cách chọn. Nhà ga đến : có 9 cách chọn.

Vậy có : $10.9 = 90$ cách chọn. ■

Bài 5. Có 3 nam và 3 nữ cần xếp ngồi vào một hàng ghế. Hỏi có mấy cách xếp sao cho :

a) Nam, nữ ngồi xen kẽ ?

b) Nam, nữ ngồi xen kẽ và có một người nam A, một người nữ B phải ngồi kề nhau ?

c) Nam, nữ ngồi xen kẽ và có một người nam C, một người nữ D không được ngồi kề nhau ?

Giải

a) Có 6 cách chọn một người tùy ý ngồi vào chỗ thứ nhất. Tiếp đến, có 3 cách chọn một người khác phái ngồi vào chỗ thứ 2. Lại có 2 cách chọn một người khác phái ngồi vào chỗ thứ 3, có 2 cách chọn vào chỗ thứ 4, có 1 cách chọn vào chỗ thứ 5, có 1 cách chọn vào chỗ thứ 6.

Vậy có : $6.3.2.2.1.1 = 72$ cách.

b) Cho cặp nam nữ A, B đó ngồi vào chỗ thứ nhất và chỗ thứ hai, có 2 cách. Tiếp đến, chỗ thứ ba có 2 cách chọn, chỗ thứ tư có 2 cách chọn, chỗ thứ năm có 1 cách chọn, chỗ thứ sáu có 1 cách chọn.

Bây giờ, cho cặp nam nữ A, B đó ngồi vào chỗ thứ hai và chỗ thứ ba. Khi đó, chỗ thứ nhất có 2 cách chọn, chỗ thứ tư có 2 cách chọn, chỗ thứ năm có 1 cách chọn, chỗ thứ sáu có 1 cách chọn.

Tương tự khi cặp nam nữ A, B đó ngồi vào chỗ thứ hai và thứ ba, thứ ba và thứ tư, thứ tư và thứ năm, thứ năm và thứ sáu.

Vậy có : $5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 40$ cách.

c) Số cách chọn để cặp nam nữ đó không ngồi kề nhau bằng số cách chọn tùy ý trừ số cách chọn để cặp nam nữ đó ngồi kề nhau.

Vậy có : $72 - 40 = 32$ cách. ■

Bài 6. Một bàn dài có 2 dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy gồm có 6 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 6 học sinh trường A và 6 học sinh trường B vào bàn nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi trong mỗi trường hợp sau :

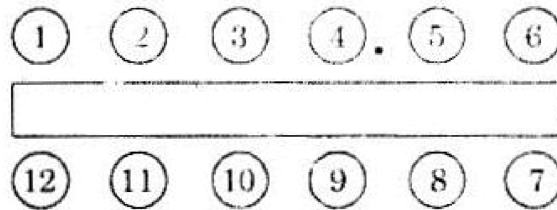
a) Bất kì 2 học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc đối diện nhau thì khác trường nhau.

b) Bất kì 2 học sinh nào ngồi đối diện nhau thì khác trường nhau.

Đại học Quốc gia TP. HCM 1999

Giải

Đánh số các ghế theo hình vẽ



a)

Ghế	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số cách xếp chỗ ngồi	12	6	5	5	4	4	3	3	2	2	1	1

Vậy số cách xếp 2 học sinh ngồi cạnh hoặc đối diện phải khác trường là :

$$12 \times 6 \times 5^2 \times 4^2 \times 3^2 \times 2^2 \times 1^2 = 1036800.$$

b)

Ghế	1	12	2	11	3	10	4	9	5	8	6	7
Số cách xếp chỗ ngồi	12	6	10	5	8	4	6	3	4	2	2	1

Vậy số cách xếp 2 học sinh ngồi đối diện phải khác là :

$$12 \times 6 \times 10 \times 5 \times 8 \times 4 \times 6 \times 3 \times 4 \times 2 \times 2 = 33177600$$ ■

Bài 7. Cho 6 chữ số 2, 3, 5, 6, 7, 9. Hỏi từ các chữ số đã cho, lập được mấy số đôi một khác nhau và :

a) gồm 3 chữ số ?

b) gồm 3 chữ số và nhỏ hơn 400 ?

c) gồm 3 chữ số và chẵn ?

d) gồm 3 chữ số và chia hết cho 5 ?

Giải

Đặt $n = \overline{abc}$

a) Có 6 cách chọn a, 5 cách chọn b ($b \neq a$), 4 cách chọn c ($c \neq a$, $c \neq b$).

Vậy có : $6 \times 5 \times 4 = 120$ số.

b) Chọn a = 2 hay a = 3, có 2 cách. Sau đó, có 5 cách chọn b ($b \neq a$), 4 cách chọn c ($c \neq a$, $c \neq b$).

Vậy có : $2.5.4 = 40$ số nhỏ hơn 400.

c) Vì n chẵn, có 2 cách chọn c (c = 2 hay c = 6). Sau đó, có 5 cách chọn a ($a \neq c$), có 4 cách chọn b ($b \neq a$, $b \neq c$).

Vậy có : $2.5.4 = 40$ số chẵn.

d) Vì n chia hết cho 5, có 1 cách chọn c (c = 5). Sau đó, có 5 cách chọn a (a ≠ c), có 4 cách chọn b (b ≠ a, ≠ c).

Vậy có : 1.5.4 = 20 số chia hết cho 5. ■

Bài 8. Có 10000 vé được đánh số từ 00000 đến 99999. Hỏi số vé gồm 5 chữ số khác nhau.

Đại học Quốc gia Hà Nội Khối G 1997

Giải

Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ là số in trên mỗi vé.

Số cách chọn a_1 là 10 (a_1 có thể là 0).

Số cách chọn a_2 là 9.

Số cách chọn a_3 là 8.

Số cách chọn a_4 là 7.

Số cách chọn a_5 là 6.

Vậy số vé gồm 5 chữ số khác nhau : $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$. ■

Bài 9. Xét dãy số gồm 7 chữ số (mỗi chữ số được chọn từ 0, 1, ..., 8, 9) thỏa chữ số vị trí số 3 là số chẵn, chữ số cuối không chia hết cho 5, các chữ số 4, 5, 6 đôi một khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

Đại học Quốc gia TP. HCM 1997

Giải

Gọi số cần tìm là $n = \overline{a_1a_2...a_7}$.

Số cách chọn a_3 là 5 (do a_3 chẵn).

Số cách chọn a_7 là 8 (do $a_7 \neq 0$ và $\neq 5$).

Số cách chọn a_4 là 10
Số cách chọn a_5 là 9
Số cách chọn a_6 là 8
} (do a_4, a_5, a_6 đôi một khác nhau).

Số cách chọn a_1 là 10 (do n là dãy số nên a_1 có thể là 0).

Số cách chọn a_2 là 10.

Vậy số cách chọn là : $5 \times 8 \times 10 \times 9 \times 8 \times 10 \times 10 = 2880000$. ■

Bài 10. Cho 10 chữ số 0, 1, 2, ..., 7, 8, 9. Có bao nhiêu số lẻ có 6 chữ số khác nhau nhỏ hơn 600000 xây dựng từ các chữ số trên.

Đại học Y Hà Nội 1997

Giải

Gọi số cần tìm $n = \overline{a_1a_2...a_6}$ với $1 \le a_1 \le 5$ và a_6 lẻ.

Đặt $X = \{0, 1, ..., 8, 9\}$

- Trường hợp 1 : *a_1 lẻ.*

  $a_1 \in \{1, 3, 5\}$ có 3 cách chọn

  $a_6 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}\backslash\{a_1\}$ có 4 cách chọn

  $a_2 \in X\backslash\{a_1, a_6\}$ có 8 cách chọn

  $a_3 \in X\backslash\{a_1, a_6, a_2\}$ có 7 cách chọn

  $a_4 \in X\backslash\{a_1, a_6, a_2, a_3\}$ có 6 cách chọn

  $a_5 \in X\backslash\{a_1, a_6, a_2, a_3, a_4\}$ có 5 cách chọn.

- Trường hợp 2 : *a_1 chẵn*

  $a_1 \in \{2, 4\}$ có 2 cách chọn

  $a_6 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ có 5 cách chọn.

Tương tự a_2, a_3, a_4, a_5 có $8 \times 7 \times 6 \times 5$ cách chọn.

Do đó số các số n thỏa yêu cầu bài toán :

$$(4 \times 3 + 2 \times 5)8 \times 7 \times 6 \times 5 = 36960.$$ ■

Bài 11. Cho $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ có thể lập được bao nhiêu số có 8 chữ số từ X mà chữ số 1 có mặt đúng 3 lần còn các chữ số khác có mặt đúng 1 lần.

Giải

Xét 1 hộc có 8 ô trống.

Có 7 cách lấy chữ số 0 bỏ vào hộc (do $a_1 \neq 0$)

Có 7 cách lấy chữ số 2 bỏ vào hộc do còn 7 hộc trống

Có 6 cách lấy chữ số 3 bỏ vào hộc do còn 6 hộc trống

Có 5 cách lấy chữ số 4 bỏ vào hộc do còn 5 hộc trống

Có 4 cách lấy chữ số 5 bỏ vào hộc do còn 4 hộc trống

Có 1 cách lấy 3 chữ số 1 bỏ vào hộc do còn 3 hộc trống và 3 chữ số 1 như nhau.

Vậy số các số thỏa yêu cầu bài toán : $7 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 5880$. ■

Bài 12. Người ta viết ngẫu nhiên các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 lên các tấm phiếu, sau đó xếp ngẫu nhiên thành 1 hàng.

a) Có bao nhiêu số lẻ gồm 6 chữ số được tạo thành.

b) Có bao nhiêu số chẵn gồm 6 chữ số được tạo thành.

Đại học Huế 1999

Giải

Gọi $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Số cần tìm $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$.

a) $a_6 \in \{1, 3, 5\}$ có 3 cách chọn

$a_1 \in X\setminus\{0, a_6\}$ có 4 cách chọn

$a_2 \in X\setminus\{a_6, a_1\}$ có 4 cách chọn

$a_3 \in X\setminus\{a_6, a_1, a_2\}$ có 3 cách chọn

$a_4 \in X\setminus\{a_6, a_1, a_2, a_3\}$ có 2 cách chọn

$a_5 \in X\setminus\{a_6, a_1, a_2, a_3, a_4\}$ có 1 cách chọn

Số các số lẻ cần tìm : $3 \times 4 \times 4 \times 3 \times 2 = 288$.

b) Số các số gồm 6 chữ số bất kì (a_1 có thể bằng 0) là :

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Số các số gồm 6 chữ số mà $a_1 = 0$ là :

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Vậy số các số gồm 6 chữ số ($a_1 \neq 0$) lấy từ X

$$720 - 120 = 600$$

Mà số các số lẻ là 288. Vậy số các số chẵn là :

$$600 - 288 = 312.$$ ■

Bài 13. Có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 5 chữ số khác nhau lấy từ 0, 2, 3, 6, 9.

Đại học Y Hà Nội 1999

Giải

Đặt $X = \{0, 2, 3, 6, 9\}$ và $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ $(a_1 \neq 0)$

- Trường hợp a_1 lẻ

  $a_1 \in \{3, 9\}$ có 2 cách chọn

  $a_5 \in \{0, 2, 6\}$ có 3 cách chọn

  $a_2 \in X\setminus\{a_1, a_5\}$ có 3 cách chọn

$a_3 \in X \backslash \{a_1, a_5, a_2\}$ có 2 cách chọn

$a_4 \in X \backslash \{a_1, a_5, a_2, a_3\}$ có 1 cách chọn.

Vậy có : $2 \times 3 \times 3 \times 2 = 36$ số n chẵn.

- Trường hợp a_1 chẵn

$a_1 \in \{2, 6\}$ có 2 cách chọn

$a_5 \in \{0, 2, 6\} \backslash \{a_1\}$ có 2 cách chọn.

Tương tự trên số cách chọn a_2, a_3, a_4 là $3 \times 2 \times 1$

Vậy có : $2 \times 2 \times 3 \times 2 = 24$ số.

Vậy số các số n chẵn là : $36 + 24 = 60$ số. ■

Bài 14. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số khác nhau sao cho tổng các chữ số của mỗi số là một số lẻ.

Giải

Gọi $n = \overline{a_1a_2...a_6a_7}$ $(a_1 \neq 0)$.

Nếu $a_1 + a_2 + ... + a_6$ là một số chẵn để n lẻ thì $a_7 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Nếu $a_1 + a_2 + ... + a_6$ là một số lẻ để n lẻ thì $a_7 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Vậy khi đã chọn được $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ thì luôn có 5 cách chọn a_7 để tổng các chữ số của n là số lẻ.

Mà số cách chọn của các a_i $(i = \overline{1,6})$ là :

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
Số cách chọn	9	10	10	10	10	10

Do đó số các số n thỏa yêu cầu bài toán là :

$$9 \times 10^5 \times 5 = 45 \times 10^5. \quad ■$$

Bài 15. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số khác nhau và chia hết cho 5.

Giải

Gọi $n = \overline{a_1a_2...a_7}$ $(a_1 \neq 0)$

Để n chia hết cho 5 thì $a_7 = 0$ hay $a_7 = 5$.

- Trường hợp $a_7 = 0$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
Số cách chọn	9	8	7	6	5	4

Vậy có : $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$ số.

• Trường hợp $a_7 = 5$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
Số cách chọn	8	8	7	6	5	4

Vậy có : $8 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$ số

Do đó số các số tự nhiên có 7 chữ số mà chia hết cho 5 là :

$$(9 + 8) \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 114240.$$ ■

Bài 16. Cho X = {0, 1, 2, 3, 4, 5}.

a) Có bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số khác nhau đôi một.

b) Có bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau chia hết cho 5.

c) Có bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau chia hết cho 9.

Đại học Huế 2000

Giải

a) Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ $(a_1 \neq 0)$

• Nếu a_4 chẵn

	a_4	a_1	a_2	a_3
Số cách chọn	2	2	4	3

• Nếu a_4 lẻ

	a_4	a_1	a_2	a_3
Số cách chọn	3	3	4	3

Vậy số các số chẵn có 4 chữ số khác nhau là :

$$2 \times 2 \times 4 \times 3 + 3 \times 3 \times 4 \times 3 = 48 + 108 = 156.$$

b) Gọi $m = \overline{a_1a_2a_3}$ $(a_1 \neq 0)$

• Nếu $a_3 = 0$

	a_1	a_2
Số cách chọn	5	4

• Nếu $a_3 = 5$

	a_1	a_2
Số cách chọn	4	4

Vậy số các số m chia hết cho 5 là : $20 + 16 = 36$.

c) Gọi $k = \overline{a_1a_2a_3}$ với $a_1 + a_2 + a_3 = 9$, $a_1 \neq 0$

Xét $X_1 = \{0, 4, 5\} \subset X$

	a_1	a_2	a_3
Số cách chọn	2	2	1

Xét $X_2 = \{2, 3, 4\} \subset X$

	a_1	a_2	a_3
Số cách chọn	3	2	1

Xét $X_3 = \{1, 3, 5\} \subset X$

	a_1	a_2	a_3
Số cách chọn	3	2	1

Vậy số các số k chia hết cho 9 là : $4 + 6 + 6 = 16$. ■

Bài 17. Cho $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau mà số đó không chia hết cho 3.

Đại học Lâm nghiệp 1999

Giải

Gọi số cần tìm $n = \overline{a_1a_2a_3}$ $(a_1 \neq 0)$

n chia hết cho 3 $\Leftrightarrow a_1 + a_2 + a_3$ là bội số của 3.

- Số các số n bất kì chọn từ X là $5 \times 5 \times 4 = 100$ vì

	a_1	a_2	a_3
Số cách chọn	5	5	4

- Các tập con của X có 3 phần tử mà tổng chia hết cho 3 là

$X_1 = \{0, 1, 2\}$, $X_2 = \{0, 1, 5\}$, $X_3 = \{0, 2, 4\}$, $X_4 = \{0, 4, 5\}$

$X_5 = \{1, 2, 3\}$, $X_6 = \{1, 3, 5\}$, $X_7 = \{2, 3, 4\}$, $X_8 = \{3, 4, 5\}$

Số các số n chia hết cho 3 được chọn từ X_1, X_2, X_3, X_4 là :

$$4 \times 2 \times 2 \times 1 = 16 \text{ số.}$$

Số các số n chia hết cho 3 được chọn từ X_5, X_6, X_7, X_8 là :

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ số.}$$

Vậy số các số n chia hết cho 3 là : $16 + 24 = 40$ số.

Do đó số các số n không chia hết cho 3 là : $100 - 40 = 60$ số. ■

BÀI TẬP

1 Một bàn dài có 2 dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy gồm 4 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 4 học sinh trường A, 4 học sinh trường B vào bàn. Hỏi có bao nhiêu cách xếp trong mỗi trường hợp sau :

a) Bất kì 2 học sinh nào ngồi cạnh hoặc đối diện nhau thì khác trường nhau.

b) Bất kì 2 học sinh nào ngồi đối diện thì khác trường nhau.

Đại học Quốc gia TP. HCM khối B 1999

2 Có 5 miếng bìa mỗi miếng có ghi 1 trong 5 chữ số 0, 1, 2, 3, 4. Lấy 3 miếng bìa từ 5 miếng bìa này rồi đặt cạnh nhau từ trái sang phải để được số gồm 3 chữ số. Hỏi :

a) Có thể lập bao nhiêu số có nghĩa gồm 3 chữ số.

b) Trong đó có bao nhiêu số chẵn.

Cao đẳng Sư phạm Hà Nội 1999

3 Từ X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} lập được bao nhiêu số chẵn gồm 5 chữ số khác nhau.

Đại học An ninh 1997

4 Có bao nhiêu số lẻ có 6 chữ số chia hết cho 9.

Đại học Cảnh sát 2000

5 Từ X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} lập được bao nhiêu số chẵn có 3 chữ số.

6 Có bao nhiêu số khác nhau gồm 7 chữ số mà tổng các chữ số là số chẵn.

7 Cho 8 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Từ 8 chữ số trên có thể lập bao nhiêu số gồm 4 chữ số đôi một khác nhau và mỗi số đều không chia hết cho 10.

Đại học Sư phạm Vinh 1999

8 Có 12 đội bóng đá tranh giải. Có bao nhiêu cách mà nhà tổ chức trao huy chương vàng, bạc, đồng.

9 Có bao nhiêu số khác nhau gồm 7 chữ số sao cho tổng các chữ số là một số chẵn.

Đại học Sư phạm Vinh khối A 1999

Chương II

HOÁN VỊ

1. Giai thừa

Với số nguyên dương n, ta định nghĩa n giai thừa, kí hiệu n!, là tích các số nguyên liên tiếp từ 1 đến n.

$$n! = 1.2.3...(n-2)(n-1)n.$$

Vì tiện lợi, người ta qui ước :

$$0! = 1.$$

Từ định nghĩa, ta có :

$$n(n-1)...(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \text{và} \quad (n-1)!n = n!$$

Ví dụ : a) $5! = 1.2.3.4.5 = 120;$

b) $\frac{9!}{5!} = 9.8.7.6 = 3024;$

c) $3!4 = 4! = 1.2.3.4 = 24;$

d) $\frac{(n+2)!}{(n-3)!} = (n+2)(n+1)n(n-1)(n-2).$

2. Hoán vị

Có n vật khác nhau, sắp vào n chỗ khác nhau. Mỗi cách sắp được gọi là 1 hoán vị của n phần tử.

Theo qui tắc nhân, chỗ thứ nhất có n cách sắp (do có n vật), chỗ thứ nhì có n – 1 cách sắp (do còn n – 1 vật), chỗ thứ ba có n – 2 cách sắp (do còn n – 2 vật), ..., chỗ thứ n có 1 cách sắp (do còn 1 vật).

Vậy, số hoán vị của n phần tử, kí hiệu P_n, là :

$$\mathbf{P_n = n(n-1)(n-2)... \times 1 = n!}$$

Ví dụ 1. Từ 3 chữ số 1, 2, 3 có thể tạo được bao nhiêu số gồm 3 chữ số khác nhau ?

Giải

Mỗi số gồm 3 chữ số khác nhau tạo ra từ 1, 2, 3 là một hoán vị của 3 phần tử.

Vậy có : $P_3 = 3! = 6$ số.

(các số đó là : 123, 132, 213, 231, 312, 321)

Ví dụ 2. Trong một lớp học, thầy giáo phát phiếu thăm dò yêu cầu học sinh ghi thứ tự 3 môn Toán, Lý, Hóa đang học theo mức độ yêu thích giảm dần. Hỏi có bao nhiêu cách ghi khác nhau ?

Giải

Đây là hoán vị của 3 phần tử. Vậy có : $P_3 = 3! = 6$ cách, khi đó có 6 cách ghi là :

(T,L,H), (T,H,L), (L,T,H), (L,H,T), (H,T,L), (H,L,T).

Ví dụ 3. Có 2 sách toán khác nhau, 3 sách lý khác nhau và 4 sách hóa khác nhau. Cần sắp xếp các sách thành một hàng sao cho các sách cùng môn đứng kế nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp ?

Giải

Trước tiên, ta sắp theo môn thì có $P_3 = 3! = 6$ cách.

Tiếp đến, các sách từng môn đổi chỗ cho nhau, toán có $P_2 = 2! = 2$ cách, lý có $P_3 = 3! = 6$ cách, hóa có $P_4 = 4! = 24$ cách. Vậy, theo qui tắc nhân, có :

$$6 \times 2 \times 6 \times 24 = 1728 \text{ cách.}$$

Bài 18. Giải phương trình : $\dfrac{x! - (x-1)!}{(x+1)!} = \dfrac{1}{6}$ với $x \in \mathbb{N}^*$

Giải

$$\frac{x! - (x-1)!}{(x+1)!} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6[x! - (x-1)!] = (x+1)!$$

$$\Leftrightarrow 6[x(x-1)! - (x-1)!] = (x+1)!$$

$$\Leftrightarrow 6(x-1)!(x-1) = (x+1)x(x-1)!$$

$$\Leftrightarrow 6(x-1) = x(x+1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Nhận do $x \in \mathbb{N}^*$. ■

Bài 19. Giải bất phương trình : $\dfrac{P_{n+4}}{P_n . P_{n+2}} < \dfrac{15}{P_{n-1}}$ (*)

Giải

Điều kiện $n > 1, n \in \mathbb{N}$.

Ta có : (*) $\Leftrightarrow \dfrac{(n+4)!}{n!(n+2)!} < \dfrac{15}{(n-1)!}$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+4)(n+3)(n+2)!}{n(n-1)!(n+2)!} < \frac{15}{(n-1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+4)(n+3)}{n} < 15$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 7n + 12 < 15n$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 8n + 12 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 < n < 6$$

Do điều kiện nên $n \in \{3, 4, 5\}$. ■

Bài 20. Gọi P_n là số hoán vị của n phần tử. Chứng minh :

a) $P_n - P_{n-1} = (n-1)P_{n-1}$

b) $1 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \ldots + (n-1)P_{n-1} = P_n$.

Giải

a) Ta có
$$\begin{aligned} P_n - P_{n-1} &= n! - (n-1)! \\ &= n(n-1)! - (n-1)! \\ &= (n-1)(n-1)! \\ &= (n-1)P_{n-1}. \end{aligned}$$

b) Từ kết quả trên, ta có :

$$+\begin{cases} P_2 - P_1 = (2-1)P_1 \\ P_3 - P_2 = (3-1)P_2 \\ P_4 - P_3 = (4-1)P_3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ P_n - P_{n-1} = (n-1)P_{n-1}. \end{cases}$$

Vậy : $P_n - P_1 = P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \ldots + (n-1)P_{n-1}$

$$\Leftrightarrow P_n = 1 + P_1 + 2P_2 + \ldots + (n-1)P_{n-1}. \quad ■$$

Bài 21. Chứng minh với mọi $n \in \mathbb{N}$: $n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Giải

Theo bất đẳng thức Cauchy

$$1 + 2 + 3 + ... + n \ge n\sqrt[n]{1 \times 2 \times ... \times n}$$

mà 1, 2, ..., n tạo một cấp số cộng nên

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Do đó : $\frac{n(n+1)}{2} \ge n\sqrt[n]{n!} \Leftrightarrow \frac{n+1}{2} \ge \sqrt[n]{n!} \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \ge n!$. ■

Bài 22. Một tạp chí thể thao định cho ra 22 kì báo chuyên đề về 22 đội bóng, mỗi kì một đội. Hỏi có bao nhiêu cách sao cho :

a) Kì báo đầu tiên nói về đội bóng A ?

b) Hai kì báo liên tiếp nói về hai đội bóng A và B ?

Giải

a) Còn lại 21 kì báo cho 21 đội bóng. Đây là hoán vị của 21 phần tử.

Vậy có : 21! cách.

b) Xem hai đội A và B là một phần tử. Ta có hoán vị của 21 phần tử, có 21! cách. Ngoài ra, trong mỗi cách trên, có thể đổi thứ tự của A và B, có 2 cách.

Vậy, có : $2 \times 21!$ cách. ■

Bài 23. Tên 12 tháng trong năm được liệt kê theo thứ tự tùy ý sao cho tháng 5 và tháng 6 không đứng kế nhau. Hỏi có mấy cách ?

Giải

Tên 12 tháng trong năm được liệt kê tùy ý, có : 12! cách.

Nếu tháng 5 và tháng 6 đứng kế nhau, ta xem tháng 5 và tháng 6 là một phần tử, ta có hoán vị của 11 phần tử, có 11! cách. Ngoài ra, trong mỗi cách này, thứ tự của tháng 5 và tháng 6 có thể đổi cho nhau, nên có : $2 \times 11!$ cách.

Vậy số cách để hai tháng 5 và tháng 6 không đứng kế nhau là :

$$12! - 2.11! = 10.11! \text{ cách. } ■$$

Bài 24. Người ta cần soạn một đề thi trắc nghiệm gồm 50 câu hỏi, chia thành 5 chủ đề, mỗi chủ đề gồm 10 câu. Cần sắp thứ tự 50 câu hỏi sao cho các câu cùng một chủ đề đứng gần nhau, chủ đề 1 đứng đầu và chủ đề 2, 3 không đứng kế nhau.

Hỏi có bao nhiêu cách sắp ?

Giải

Chủ đề 2, 3 đứng tùy ý : Trước tiên, sắp theo chủ đề, đây là hoán vị của bốn chủ đề 2, 3, 4, 5, có 4! cách. Tiếp đến, sắp các câu trong từng chủ đề, mỗi chủ đề có 10! cách.

Vậy có : $4!5.10!$ cách = $120.10!$ cách.

Chủ đề 2, 3 đứng kề nhau : xem chủ đề 2 và 3 là một phần tử, ta có hoán vị của 3 phần tử (2, 3), 4, 5 hay (3, 2), 4, 5, có : 2.3! cách. Tiếp đến, sắp các câu trong từng chủ đề, có : 5.10! cách. Nên có : 60.10! cách.

Vậy số cách sắp theo yêu cầu là :

$$120.10! - 60.10! = 60.10! = 217728000 \text{ cách. } ■$$

Bài 25. Một công ty cần thực hiện một cuộc điều tra thăm dò thị hiếu người tiêu dùng về sản phẩm của mình. Công ty đưa ra 10 tính chất của sản phẩm và yêu cầu khách hàng sắp thứ tự theo mức độ quan trọng giảm dần. Giả sử tính chất 1 và tính chất 10 đã được xếp hạng.

Hỏi có mấy cách xếp ?

Giải

Còn lại 8 tính chất cần xếp hạng. Đây là hoán vị của 8 phần tử.

Vậy, có : $8! = 40320$ cách. ■

Bài 26. Có 5 bi đỏ và 5 bi trắng có kích thước khác nhau đôi một. Có bao nhiêu cách sắp các bi này thành 1 hàng dài sao cho hai bi cùng màu không được nằm kề nhau.

Giải

Xét một hộc đựng bi có 10 ô trống, mỗi ô được đánh số theo thứ tự từ 1 đến 10.

- Lấy 5 bi đỏ bỏ vào vị trí ô mang số chẵn 2, 4, 6, 8, 10 ta có 5! cách.

  Sau đó lấy 5 bi trắng bỏ vào 5 ô còn lại ta cũng có 5! cách.

  Vậy trường hợp này ta có 5! × 5! cách.

- Lập luận tương tự lấy 5 bi đỏ bỏ vào các ô mang số lẻ; lấy 5 bi trắng bỏ vào ô số chẵn ta cũng có 5! × 5! cách.

- Do đó số cách thỏa yêu cầu bài toán là :

$$2(5!)^2 = 2(120)^2 = 28\,800 \text{ cách.} \blacksquare$$

Bài 27. Có bao nhiêu cách xếp 5 học sinh A, B, C, D, E vào 1 ghế dài sao cho :

a) C ngồi chính giữa **b)** A, E ngồi hai đầu ghế.

Đại học Hàng hải 1999

Giải

a) Số cách xếp 4 học sinh A, B, D, E vào 4 ghế là : 4! = 24.

b) Số cách xếp A, E ngồi hai đầu ghế là : 2!

Số cách xếp 3 học sinh còn lại : 3!

Vậy số cách xếp thỏa yêu cầu bài toán : 2! × 3! = 2 × 6 = 12. ■

Bài 28. Trong một phòng có 2 bàn dài, mỗi bàn có 5 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 10 học sinh gồm 5 nam và 5 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi nếu

a) Các học sinh ngồi tùy ý.

b) Các học sinh nam ngồi 1 bàn, học sinh nữ ngồi 1 bàn.

Đại học Cần Thơ 1999

Giải

a) Số cách xếp 10 học sinh ngồi tùy ý là : 10! = 3628800.

b) Số cách xếp nam sinh ngồi 1 bàn : 5!

Số cách nữ sinh ngồi 1 bàn : 5!

Số cách xếp 2 bàn : 2!

Số cách xếp thỏa yêu cầu bài toán : $2! \times 5! \times 5! = 28800$. ■

Bài 29. Một học sinh có 12 cuốn sách đôi một khác nhau trong đó có 4 sách Văn, 2 sách Toán, 6 sách Anh văn. Hỏi có bao nhiêu cách sắp các cuốn sách lên 1 kệ dài nếu các cuốn cùng môn sắp kề nhau.

Đại học Quốc gia TP. HCM khối D 1999

Giải

Số cách sắp 4 sách Văn kề nhau : 4!

Số cách sắp 2 sách Toán kề nhau : 2!

Số cách sắp 6 sách Anh kề nhau : 6!

Số cách sắp 3 loại sách Văn, Toán, Anh lên kệ : 3!

Số cách xếp thỏa yêu cầu bài toán : $4! \times 2! \times 6! \times 3! = 207360$. ■

Bài 30. Từ $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ thiết lập các số có 6 chữ số khác nhau. Hỏi trong các số lập được có bao nhiêu số mà hai chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau.

Đại học Ngoại thương khối A 2001

Giải

Gọi $n = \overline{a_1 ... a_6}$.

Số các số có 6 chữ số được lập từ X : 6!

Đặt $a = \overline{16}$. Số các số tạo nên bởi hoán vị a và 2, 3, 4, 5 là 5!

Đặt $b = \overline{61}$. Số các số tạo nên bởi hoán vị b và 2, 3, 4, 5 là 5!

Số cách xếp thỏa yêu cầu bài toán : $6! - 2 \times 5! = 480$. ■

Bài 31. Xét các số gồm 9 chữ số trong đó có 5 số 1 và 4 chữ số còn lại là 2, 3, 4, 5. Hỏi có bao nhiêu số mà

a) Năm chữ số 1 sắp kề nhau. **b)** Các chữ số được xếp tùy ý.

Học viện Ngân hàng khối D 1999

Giải

a) Đặt $a = \overline{11111}$

Để sắp số a và 2, 3, 4, 5 có $5! = 120$ cách.

b) Số các số có 9 chữ số được lấy từ 9 số trên : 9!

Do 5 chữ số 1 như nhau nên số lần sắp trùng lặp lại là 5!

Số cách xếp thỏa yêu cầu bài toán : $\frac{9!}{5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 3024$. ■

Bài 32. Có bao nhiêu số gồm 7 chữ số đôi một khác nhau được lập từ 7 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9 sao cho hai chữ số chẵn không nằm liền nhau.

Cao đẳng Kinh tế Đối ngoại 2000

Giải

Số các số có 7 chữ số khác nhau được lập từ 7 chữ số trên là $P_7 = 7!$

Trong các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9 chỉ có hai chữ số chẵn là 2 và 4.

Gọi $a = \overline{24}$.

Số hoán vị của a và 1, 3, 5, 7, 9 là 6!

Gọi $b = \overline{42}$.

Số hoán vị của b và 1, 3, 5, 7, 9 là 6!

Số cách xếp thỏa yêu cầu bài toán : $7! - 2(6!) = 3600$ số. ■

Bài 33. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số đều lớn hơn 4 và đôi một khác nhau. Tính tổng các số trên.

Đại học Huế khối D 1997

Giải

Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ và $X = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

Số các số n chọn từ X là $5! = 120$.

Xét các chữ số hàng đơn vị.

Do số lần xuất hiện của 5 loại chữ số bằng nhau nên mỗi chữ số xuất hiện $\frac{120}{5} = 24$ lần.

Vậy tổng các chữ số hàng đơn vị là :

$$24(5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 24 \times 35 = 840$$

Tương tự, tổng các chữ số hàng chục là 840×10

tổng các chữ số hàng trăm là 840×10^2

tổng các chữ số hàng ngàn là 840×10^3

tổng các chữ số hàng vạn là 840×10^4.

Do đó $S = 840 + 840 \times 10 + 840 \times 10^2 + 840 \times 10^3 + 840 \times 10^4$

$S = 840\,(1 + 10 + 100 + 1000 + 10000)$

$S = 840\,(11111) = 9333240.$

Chú ý : Ta có thể tính S qua công thức tổng n số hạng của cấp số cộng.

$$S = \frac{1}{2}(n_{max} + n_{min}) \times 120$$

$$= \frac{1}{2}(98\,765 + 56\,789) \times 120 = 9333240.$$ ■

Bài 34. Trong các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số có 7 chữ số trong đó chữ số 4 có mặt đúng 3 lần còn các chữ số khác có mặt đúng 1 lần.

Đại học An ninh khối D 2001

Giải

Cách 1 : Gọi $n = \overline{a_1a_2...a_7}$

Số các số n bất kì (a_1 có thể là 0) mà 4 có mặt đúng 3 lần và các chữ số khác đúng 1 lần : $\frac{7!}{3!}$.

Số các số n mà $a_1 = 0$; 4 có mặt đúng 3 lần và các chữ số 1, 2, 3 có mặt đúng 1 lần : $\frac{6!}{3!}$.

Số các số thỏa yêu cầu bài toán :

$$\frac{7!}{3!} - \frac{6!}{3!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 - 6 \times 5 \times 4 = 720.$$

Cách 2 : Xét hộc có 7 ô trống.

Lấy số 0 bỏ vào hộc có 6 cách

Lấy số 1 bỏ vào hộc có 6 cách

Lấy số 2 bỏ vào hộc có 5 cách

Lấy số 3 bỏ vào hộc có 4 cách

Lấy 3 số 4 bỏ vào hộc có 1 cách.

Số các số thỏa yêu cầu bài toán : $6 \times 6 \times 5 \times 4 = 720.$ ■

BÀI TẬP

1 Chứng minh :

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < 3.$$

2 Cho 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Tìm tổng các số gồm 5 chữ số tạo bởi hoán vị của 5 chữ số trên.

Cao đẳng Sư phạm Qui Nhơn 1999

3 Có thể lập được bao nhiêu số có 8 chữ số trong các số 1, 2, 3, 4, 5, 6 trong đó 1 và 6 đều có mặt 2 lần còn các chữ số khác xuất hiện 1 lần.

Đại học Sư phạm Hà Nội 2000

4 Cho 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6. Có bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau được lập từ 6 số trên mà :

a) Bắt đầu bằng 1;

b) Không bắt đầu bằng 6;

c) Bắt đầu bằng 12;

d) Không bắt đầu bằng 654.

5 Một nhóm gồm 10 học sinh, trong đó có 7 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp 10 học sinh trên thành 1 hàng dọc sao cho 7 nam sinh phải đứng liền nhau.

Đại học Cần Thơ 2001

6 Có 6 học sinh được xếp 6 chỗ ngồi đã được ghi số thứ tự trên một bàn dài. Tìm số cách xếp 6 học sinh này trong mỗi trường hợp sau :

a) vào bàn.

b) 2 học sinh A và B không ngồi cạnh nhau.

Trung học Công nghệ TP 2000

7 Cho 5 chữ số 0, 1, 2, 3, 4. Từ 5 chữ số đó có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số sao cho mỗi chữ số đó có mặt một lần.

Đại học Kinh tế Hà Nội 1998

8 Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số có 10 chữ số được chọn từ 8 chữ số trên, trong đó chữ số 6 có mặt đúng 3 lần, còn các chữ số khác có mặt đúng 1 lần.

Đại học Nông nghiệp khối B 2001

Chương III

CHỈNH HỢP

Có n vật khác nhau, chọn ra k vật khác nhau ($1 \le k \le n$), sắp vào k chỗ khác nhau. Mỗi cách chọn rồi sắp như vậy gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử.

Chỗ thứ nhất có n cách chọn (do có n vật), chỗ thứ 2 có (n – 1) cách chọn (do còn n – 1 vật), chỗ thứ 3 có n – 2 cách chọn (do còn n – 2 vật), ..., chỗ thứ k có n – (k – 1) cách chọn (do còn n – (k – 1) vật). Vậy, theo qui tắc nhân, số cách chọn là :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Nếu kí hiệu số chỉnh hợp chập k của n phần tử là A_n^k, ta có :

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Ví dụ 1. Một nhà hàng có 5 món ăn chủ lực, cần chọn 2 món ăn chủ lực khác nhau cho mỗi ngày, một món buổi trưa và một món buổi chiều. Hỏi có mấy cách chọn ?

Giải

Đây là chỉnh hợp chập 2 của 5 phần tử, có :

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 4.5 = 20 \text{ cách chọn.}$$

(Giả sử 5 món ăn được đánh số 1, 2, 3, 4, 5; ta có các cách chọn sau đây : (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)).

Ví dụ 2. Trong một trường đại học, ngoài các môn học bắt buộc, có 3 môn tự chọn, sinh viên phải chọn ra 2 môn trong 3 môn đó, 1 môn chính và 1 môn phụ. Hỏi có mấy cách chọn ?

Giải

Đây là chỉnh hợp chập 2 của 3 phần tử. Vậy có :

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6 \text{ cách chọn.}$$

(Giả sử 3 môn tự chọn là a, b, c thì 6 cách chọn theo yêu cầu là (a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)).

Ví dụ 3. Từ 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể tạo ra bao nhiêu số gồm 2 chữ số khác nhau ?

Giải

Đây là chỉnh hợp chập 2 của 5 phần tử. Vậy có :

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 5 \times 4 = 20 \text{ số.}$$

(Các số đó là : 12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 45, 51, 52, 53, 54).

Bài 35. Chứng minh với $n, k \in \mathbb{N}$ và $2 \le k < n$

a) $A_n^k = A_{n-1}^k + kA_{n-1}^{k-1}$ **b)** $A_{n+k}^{n+2} + A_{n+k}^{n+1} = k^2A_{n+k}^n$.

Giải

a) Ta có :

$$A_{n-1}^k + kA_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} + k.\frac{(n-1)!}{(n-k)!}$$

$$= (n-1)!\left[\frac{1}{(n-k-1)!} + \frac{k}{(n-k)(n-k-1)!}\right]$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}\left(1 + \frac{k}{n-k}\right) = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}\cdot\frac{n}{n-k}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!} = A_n^k.$$

b) $$A_{n+k}^{n+2} + A_{n+k}^{n+1} = \frac{(n+k)!}{(k-2)!} + \frac{(n+k)!}{(k-1)!} = \frac{(n+k)!}{(k-2)!} + \frac{(n+k)!}{(k-1)(k-2)!}$$

$$= \frac{(n+k)!}{(k-2)!}\left[1 + \frac{1}{k-1}\right]$$

$$= \frac{(n+k)!}{(k-2)!}\cdot\frac{k}{k-1} = \frac{(n+k)!k^2}{k!} = A_{n+k}^n.k^2. \quad \blacksquare$$

Bài 36. Giải phương trình $P_x.A_x^2 + 72 = 6(A_x^2 + 2P_x)$.

Đại học Quốc gia Hà Nội khối D 2001

Giải

Điều kiện $x \in \mathbb{N}$ và $x \ge 2$.

Ta có : $P_x . A_x^2 + 72 = 6(A_x^2 + 2P_x)$

$$\Leftrightarrow \quad x!\frac{x!}{(x-2)!} + 72 = 6\left[\frac{x!}{(x-2)!} + 2x!\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad x!x(x-1) + 72 = 6[x(x-1) + 2x!]$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2 - x - 12)x! = 6(x^2 - x - 12)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2 - x - 12)(x! - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 12 = 0 \\ x! - 6 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -3 : \text{loại} \\ x = 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 3 \end{array}\right. \quad ■$$

Bài 37. Giải bất phương trình : $A_x^3 + 5A_x^2 \le 21x$.

Đại học Quốc gia Hà Nội khối B 1998

Giải

Điều kiện $x \in \mathbb{N}$ và $x \ge 3$.

$$A_x^3 + 5A_x^2 \le 21x$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x!}{(x-3)!} + 5\frac{x!}{(x-2)!} \le 21x$$

$$\Leftrightarrow \quad x(x-1)(x-2) + 5x(x-1) \le 21x$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-1)(x-2) + 5(x-1) \le 21 \quad (\text{do } x \ge 3)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 24 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad -6 \le x \le 4.$$

Do $x \in \mathbb{N}$ và $x \ge 3$ nên $x = 3$, $x = 4$ là nghiệm. ■

Bài 38. Tìm các số âm trong dãy số $x_1, x_2, ..., x_n$ với

$$x_n = \frac{A_{n+4}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_n}$$ với P_n là số hoán vị của n phần tử.

Đại học An ninh 2001

Giải

Điều kiện $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Ta có : $x_n = \dfrac{\dfrac{(n+4)!}{n!}}{(n+2)!} - \dfrac{143}{4n!} = \dfrac{(n+4)(n+3)}{n!} - \dfrac{143}{4n!}$.

Vậy : $x_n < 0 \Leftrightarrow (n+4)(n+3) - \dfrac{143}{4} < 0$ (do $n! > 0$)

$$\Leftrightarrow 4n^2 + 28n - 95 < 0 \Leftrightarrow -\frac{19}{2} < n < \frac{5}{2}.$$

Do $n = 1, 2, 3, \ldots$ nên $n = 1, n = 2$.

Vậy 2 số cần tìm là $x_1 = \dfrac{5 \times 4}{1} - \dfrac{143}{4} = -\dfrac{63}{4}$

và $x_2 = \dfrac{6 \times 5}{2} - \dfrac{143}{4 \times 2} = 15 - \dfrac{143}{8} = -\dfrac{23}{8}$. ■

Bài 39. Chứng minh với $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$ thì

$$\frac{1}{A_2^2} + \frac{1}{A_3^2} + \ldots + \frac{1}{A_n^2} = \frac{n-1}{n}.$$

Đại học An ninh khối A 2001

Giải

Ta có :

$$+\begin{cases} \dfrac{1}{A_2^2} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{A_3^2} = \dfrac{1!}{3!} = \dfrac{1}{3 \times 2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{A_4^2} = \dfrac{2!}{4!} = \dfrac{1}{4 \times 3} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{1}{A_n^2} = \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Cộng vế theo vế $n - 1$ đẳng thức trên ta được :

$$\frac{1}{A_2^2} + \frac{1}{A_3^2} + \frac{1}{A_4^2} + \ldots + \frac{1}{A_n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}. \blacksquare$$

Bài 40. Có bao nhiêu số điện thoại bắt đầu bằng 2 chữ cái khác nhau lấy từ 26 chữ cái A, B, C, ..., Z và tiếp theo là 5 chữ số khác nhau không có số 0.

Giải

Chọn 2 chữ cái trong 26 chữ cái, xếp vào hai vị trí đầu tiên, đây là chỉnh hợp chập 2 của 26 phần tử. Tiếp theo, chọn 5 chữ số trong 9 chữ số khác 0, xếp vào 5 vị trí, đây là chỉnh hợp chập 5 của 9 phần tử.

Vậy có : $A_{26}^2 . A_9^5 = \frac{26!}{24!} \cdot \frac{9!}{4!} = 9828000$ số. ■

Bài 41. Một đội bóng đá có 18 cầu thủ. Cần chọn ra 11 cầu thủ phân vào 11 vị trí trên sân để thi đấu chính thức. Hỏi có mấy cách chọn nếu :

a) Ai cũng có thể chơi ở bất cứ vị trí nào ?

b) Chỉ có cầu thủ A làm thủ môn được, các cầu thủ khác chơi ở vị trí nào cũng được ?

c) Có 3 cầu thủ chỉ có thể làm thủ môn được, các cầu thủ khác chơi ở vị trí nào cũng được ?

Giải

a) Chọn 11 người trong 18 người, xếp vào 11 vị trí. Đây là chỉnh hợp chập 11 của 18 phần tử. Có : $A_{18}^{11} = \frac{18!}{7!} = 1270312243$ cách.

b) Chọn A làm thủ môn. Tiếp đến, chọn 10 người trong 17 người còn lại, xếp vào 10 vị trí. Vậy có : $A_{17}^{10} = \frac{17!}{7!} = 705729024$ cách.

c) Chọn 1 trong 3 người làm thủ môn, có 3 cách. Tiếp đến, chọn 10 người trong 15 người kia, xếp vào 10 vị trí, có $A_{15}^{10} = \frac{15!}{5!}$ cách.

Vậy, có : $3.\frac{15!}{5!} = 326918592$ cách. ■

Bài 42. Có 10 cuốn sách khác nhau và 7 cây bút máy khác nhau. Cần chọn ra 3 cuốn sách và 3 cây bút máy để tặng cho 3 học sinh, mỗi em một cuốn sách và một cây bút máy. Hỏi có mấy cách ?

Giải

Chọn 3 trong 10 cuốn sách để tặng cho 3 học sinh. Đây là chỉnh hợp chập 3 của 10 phần tử, có A_{10}^3 cách.

Tiếp theo chọn 3 trong 7 cây bút để tặng cho 3 học sinh. Đây là chỉnh hợp chập 3 của 7 phần tử, có A_7^3 cách.

Vậy, có : $A_{10}^3 . A_7^3 = \dfrac{10!}{7!} \cdot \dfrac{7!}{4!} = 10.9.8.7.6.5 = 151200$ cách. ■

Bài 43. Trong một chương trình văn nghệ, cần chọn ra 7 bài hát trong 10 bài hát và 3 tiết mục múa trong 5 tiết mục múa rồi xếp thứ tự biểu diễn. Hỏi có bao nhiêu cách khác nhau nếu các bài hát được xếp kế nhau và các tiết mục múa được xếp kế nhau ?

Giải

Xếp hát rồi đến múa hay múa rồi đến hát : có 2 cách.

Trong mỗi trường hợp đó, chọn 7 trong 10 bài hát rồi xếp thứ tự, có A_{10}^7 cách. Tiếp đến chọn 3 trong 5 tiết mục múa rồi xếp thứ tự, có : A_5^3 cách.

Vậy có : $2.A_{10}^7 . A_5^3 = 2.\dfrac{10!}{3!} \cdot \dfrac{5!}{2!} = 72576000$ cách. ■

Bài 44. Trong một cuộc đua ngựa gồm 10 con. Hỏi có mấy cách để 10 con ngựa này về đích nhất, nhì, ba.

Giải

Số các cách để trong 10 con ngựa này về đích nhất, nhì, ba là số các chỉnh hợp 10 chập 3 (do có thứ tự). Đó là :

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 10.9.8 = 720 \text{ cách. ■}$$

Bài 45. Xét các bảng số xe là dãy gồm 2 chữ cái đứng trước và 4 chữ số đứng sau. Các chữ cái được lấy từ 26 chữ cái A, B, ..., Z. Các chữ số được lấy từ 0, 1, ..., 9.

a) Có mấy biển số trong đó có ít nhất 1 chữ cái khác chữ O và các chữ số đôi một khác nhau.

b) Có mấy biển số có 2 chữ cái khác nhau đồng thời có đúng 2 chữ số lẻ, và 2 chữ số lẻ đó giống nhau.

Học viện Ngân hàng TP. HCM 2000

Giải

a) Số cách chọn 2 chữ cái trong đó có ít nhất 1 chữ cái khác chữ O :

$26 \times 26 - 1 = 675$ (1 là số trường hợp mà 2 chữ cái đều là O).

Số cách chọn 4 chữ số đôi một khác nhau : A_{10}^4.

Vậy có $675 \times A_{10}^4 = 675 \times 5040 = 3420000$ biển số.

b) Số cách chọn 2 chữ cái khác nhau : 26×25.

Có 5 cặp số lẻ giống nhau, chọn 1 cặp có 5 cách.

Lấy cặp số lẻ giống nhau này xếp vào 2 trong 4 vị trí của biển số có : $\dfrac{A_4^2}{2!} = 6$ cách.

Còn 2 vị trí trống mang 2 chữ số chẵn (có thể giống nhau) trong 5 chữ số chẵn có : 5×5 cách.

Do đó số biển số thỏa yêu cầu câu b là :

$26 \times 25 \times 5 \times 6 \times 25 = 487500$ biển số. ■

Bài 46. Có 30 học sinh dự thi học sinh giỏi toán toàn quốc. Có 6 giải thưởng xếp hạng từ 1 đến 6 và không ai được nhiều hơn 1 giải. Hỏi:

a) Có bao nhiêu danh sách học sinh đoạt giải có thể có ?

b) Nếu đã biết học sinh A chắc chắn đoạt giải, thì có bao nhiêu danh sách học sinh đoạt giải có thể có ?

Giải

a) Chọn 6 học sinh trong 30 học sinh, xếp vào 6 giải là chỉnh hợp chập 6 của 30 phần tử. Vậy có :

$$A_{30}^6 = \frac{30!}{24!} = 30.29.28.27.26.25 = 427518000 \text{ cách.}$$

b) Nếu học sinh A chắc chắn không đoạt giải, cần chọn 6 học sinh trong 29 học sinh, xếp vào 6 giải. Đây là chỉnh hợp chập 6 của 29 phần tử, có :

$$A_{29}^6 = \frac{29!}{23!} = 29.28.27.26.25.24 = 342014400 \text{ cách.}$$

Suy ra số danh sách theo yêu cầu đề bài là :

$427.518.000 - 342.014.400 = 85503600$. ■

Bài 47. Một lớp học có 40 học sinh. Giáo viên chủ nhiệm lớp muốn chọn ra 1 lớp trưởng, 1 lớp phó học tập và 1 lớp phó lao động. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

Giải

Đây là bài toán chỉnh hợp vì từ 40 học sinh chọn ra 3 em làm cán bộ lớp có theo thứ tự lớp trưởng, lớp phó học tập, lớp phó lao động.

Vậy số cách chọn là :

$$A_{40}^{3} = \frac{40!}{37!} = 40 \times 39 \times 38 = 59280 \text{ cách.} \blacksquare$$

Bài 48. Có 6 người đi vào 1 thang máy của một chung cư có 10 tầng. Hỏi có bao nhiêu cách để :

a) Mỗi người đi vào 1 tầng khác nhau.

b) 6 người này, mỗi người đi vào 1 tầng bất kì nào đó.

Giải

a) Số cách đi vào 6 tầng khác nhau của 6 người này là số cách chọn 6 trong 10 số khác nhau (mỗi tầng được đánh 1 số từ 1 đến 10).

Đó là số chỉnh hợp 10 chập 6 : $A_{10}^{6} = \frac{10!}{4!} = 151200$.

b) Mỗi người có 10 cách lựa chọn từ tầng 1 đến 10. Mà có 6 người. Vậy số cách chọn là 10^6. ■

Bài 49. Có 100000 chiếc vé số được đánh số từ 00000 đến 99999. Hỏi số các vé gồm 5 chữ số khác nhau là bao nhiêu.

Đại học Quốc gia Hà Nội 1997

Giải

Mỗi vé có 5 chữ số khác nhau chính là một chỉnh hợp 10 chập 5.

Vậy số các vé gồm 5 chữ số khác nhau là :

$$A_{10}^{5} = \frac{10!}{5!} = 30240.$$

Ghi chú : Có thể giải bằng phép đếm như bài 8 trang 11. ■

Bài 50. Với 10 chữ số 0, 1, ..., 8, 9 có thể lập bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau.

Đại học Cảnh sát 1999

Giải

Gọi $n = \overline{a_1a_2...a_5}$ $(a_1 \neq 0)$

Số các số n bất kì (a_1 có thể bằng 0)

$$A_{10}^5 = \frac{10!}{5!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$$

Số các số n mà $a_1 = 0$ là :

$$A_9^4 = \frac{9!}{5!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$$

Vậy số các số thỏa yêu cầu bài toán : 30240 – 3024 = 27216. ■

Bài 51. Có bao nhiêu số nguyên dương bé hơn 1000 mà mỗi số đều có các chữ số đôi một khác nhau.

Giải

Gọi $n \in N$ và $0 < n < 1000$.

- Số các số n có 1 chữ số là : 9.
- Số các số n có 2 chữ số khác nhau là :

$$A_{10}^2 - A_9^1 = \frac{10!}{8!} - \frac{9!}{8!} = 81$$

trong đó A_9^1 là số các số có 2 chữ số khác nhau mà bắt đầu bằng 0.

- Số các số n có 3 chữ số khác nhau là :

$$A_{10}^3 - A_9^2 = \frac{10!}{7!} - \frac{9!}{7!} = 648$$

trong đó A_9^2 là số các số có 3 chữ số khác nhau mà bắt đầu bằng 0.

- Vậy có : $9 + (A_{10}^2 - A_9^1) + (A_{10}^3 - A_9^2) = 9 + 81 + 648 = 738$. ■

Bài 52. Từ 0, 1, 3, 5, 7 có thể lập bao nhiêu số, mỗi số gồm 4 chữ số khác nhau và không chia hết cho 5.

Đại học Quốc gia Hà Nội

Giải

Cách 1 **:** Gọi n = $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ $(a_1 \neq 0)$

- Nếu $a_4 = 0$ thì số các số n là

$$A_4^3 = \frac{4!}{1!} = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

- Nếu $a_4 = 5$ thì số các số n là

$$A_4^3 - A_3^2 = 24 - \frac{3!}{1!} = 18.$$

với A_3^2 là số các số n mà $a_1 = 0$.

Do đó số các số chia hết cho 5 : 24 + 18 = 42.

Nhưng số các số n tùy ý $(a_1 \neq 0)$ là :

$$A_5^4 - A_4^3 = \frac{5!}{1!} - 24 = 96.$$

với A_4^3 là số các số n mà $a_1 = 0$.

Vậy số các số không chia hết cho 5 : 96 – 42 = 54.

Cách 2 **:** Số các số tận cùng bằng 1 :

$$A_4^3 - A_3^2 = 4! - 3! = 18$$

với A_3^2 là số các số n mà $a_1 = 0$.

Tương tự số các số tận cùng bằng 3, 7 cũng là 18.

Vậy các số n không chia hết cho 5 là : 18 + 18 + 18 = 54. ■

Bài 53. Từ X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 5.

Đại học Kinh tế Quốc dân 2001

Giải

Gọi n = $\overline{a_1a_2...a_5}$. $(a_1 \neq 0)$.

Cách 1 **:**

- Chọn trước $a_1 = 5$ thì số các số n là $A_6^4 = \frac{6!}{2!} = 360$.
- Số các số mà $a_i = 5$ (i = 2, 3, 4, 5) kể cả a_1 có thể là 0 : $4A_6^4$.

Số các số mà $a_1 = 0$ và $a_i = 5$ (i = 2, 3, 4, 5) là : $4A_5^3$.

Do đó số các số mà $a_1 \neq 0$ và $a_i = 5$ $(i = 2, 3, 4, 5)$ là :

$$4(A_6^4 - A_5^3) = 4(360 - 60) = 1200.$$

Vậy số các số n phải có mặt 5 là :

$$360 + 1200 = 1560.$$

Cách 2 :

Số các số gồm 5 chữ số bất kì :

$$A_7^5 - A_6^4 = 2160$$

Số các số gồm 5 chữ số mà không có mặt chữ số 5

$$A_6^5 - A_5^4 = 600$$

Vậy số các số thỏa yêu cầu bài toán : 2160 – 600 = 1560. ■

Bài 54. Từ 7 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số chẵn mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau.

Đại học An ninh 1997 – Y Dược TP. HCM 1997

Giải

Cách 1 :

Số các số gồm 5 chữ số khác nhau tận cùng bằng 0

$$A_6^4 = \frac{6!}{2!} = 360$$

Số các số gồm 5 chữ số khác nhau tận cùng bằng 2 (a_1 có thể là 0)

$$A_6^4 = 360$$

Số các sổ gồm 5 chữ số khác nhau bắt đầu 0, tận cùng là 2

$$A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

Vậy số các số tận cùng là 2 mà $a_1 \neq 0$

$$360 - 60 = 300$$

Tương tự số các số tận cùng bằng 4, 6 cũng là 300.

Vậy số các số thỏa yêu yêu cầu bài toán :

$$360 + 3.(300) = 1260.$$

Cách 2 : Gọi n = $\overline{a_1a_2...a_5}$ chẵn.

Trường hợp 1 : a_1 lẻ.

	a_1	a_5	a_2	a_3	a_4
Số cách chọn	3	4	5	4	3

Trường hợp 2 : a_1 chẵn.

	a_1	a_5	a_2	a_3	a_4
Số cách chọn	3	3	5	4	3

Vậy số các số n chẵn là :

$$3 \times 4 \times 5 \times 4 \times 3 + 3 \times 3 \times 5 \times 4 \times 3 = 720 + 540 = 1260. \blacksquare$$

Bài 55. Cho X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} có thể lập bao nhiêu số n gồm 5 chữ số khác nhau đôi một từ X mà

a) n chẵn

b) Một trong 3 chữ số đầu tiên phải có mặt chữ số 1.

Đại học Quốc gia TP. HCM khối D 1999

Giải

Gọi n = $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$.

a) ***Cách 1 :*** Số các số tận cùng là 0 : A_7^4

Số các số tận cùng là 2 : $A_7^4 - A_6^3$ (A_6^3 là số các số n tận cùng 2 bắt đầu 0).

Tương tự số các số tận cùng 4, 6 cũng là $A_7^4 - A_6^3$.

Vậy số các số chẵn

$$A_7^4 + 3(A_7^4 - A_6^3) = 4A_7^4 - 3A_6^3 = 4.\frac{7!}{3!} - 3.\frac{6!}{3!} = 3000.$$

Cách 2 :

Trường hợp 1 : a_1 lẻ

	a_1	a_5	a_2	a_3	a_4
Số cách chọn	4	4	6	5	4

Trường hợp 2 : a_1 chẵn

	a_1	a_5	a_2	a_3	a_4
Số cách chọn	3	3	6	5	4

Do đó số các số n chẵn là : $30.4^3 + 120.3^2 = 3000$.

b) ***Cách 1 :***

- Xét các số n bất kì (kể cả $a_1 = 0$)

Có 3 cách chọn chữ số 1 (do a_1 hoặc a_2 hoặc a_3 bằng 1)

4 vị trí còn lại có $A_7^4 = \frac{7!}{3!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ cách.

Vậy có $3 \times 840 = 2520$ số.

- Xét các số $n = \overline{0a_2a_3a_4a_5}$

Có 2 cách chọn vị trí cho chữ số 1.

Có $A_6^3 = \frac{6!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$ cách chọn cho 3 vị trí còn lại.

Vậy có $2 \times 120 = 240$ số

Số các số thỏa yêu cầu bài toán : $2520 - 240 = 2280$ số.

Cách 2 :

Số các số n mà $a_1 = 1$ là

$$A_7^4 = \frac{7!}{3!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

Số các số n mà $a_2 = 1$ là

$$A_7^4 - A_6^3 = 840 - 120 = 720$$ (A_6^3 là số các số dạng $\overline{01a_3a_4a_5}$)

Số các số mà $a_3 = 1$ cũng là 720.

Số các số thỏa yêu cầu bài toán : $840 + 720 + 720 = 2280$ số. ■

Bài 56. Từ 7 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau và có thể lập bao nhiêu số có 4 chữ số phân biệt trong đó có 2 chữ số 1, 2.

Đại học Dân lập Thăng Long 1998

Giải

Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4}$

- Số các số n là :

$$A_7^4 = \frac{7!}{3!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840.$$

- Xét hộc có 4 ô trống.

Đem chữ số 1 bỏ vào hộc có : 4 cách.

Đem chữ số 2 bỏ vào hộc có : 3 cách.

Còn lại 5 chữ số 3, 4, 5, 6, 7 bỏ vào 2 ô trống còn lại có

$$A_5^2 = \frac{5!}{3!} = 5 \times 4 = 20 \text{ cách.}$$

Vậy số các số thỏa yêu cầu bài toán : $4 \times 3 \times 20 = 240$ số. ■

Bài 57. Từ 10 chữ số 0, 1, 2, ..., 7, 8, 9 có thể lập bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau sao cho các số đó đều phải có mặt 0 và 1.

Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông 1999

Giải

Xét hộc có 6 ô trống.

Do $a_1 \neq 0$ nên có 5 cách đưa số 0 bỏ vào hộc.

Còn lại 5 ô trống nên có 5 cách đưa số 1 vào.

Còn 8 chữ số 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 mà có 4 hộc trống nên có

$$A_8^4 = \frac{8!}{4!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680 \text{ cách.}$$

Do đó số các số cần tìm : $5 \times 5 \times 1680 = 42\,000$. ■

Bài 58. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau (chữ số đầu tiên khác 0) trong đó có một chữ số 0 nhưng không có mặt chữ số 1.

Đại học Quốc gia TP. HCM 2001

Giải

Gọi $X = \{0, 1, 2, ..., 7, 8, 9\}$.

Xét hộc có 6 ô trống.

Lấy chữ số 0 bỏ vào hộc có 5 cách (do $a_1 \neq 0$).

Từ $X \setminus \{0, 1\}$ còn 8 chữ số chọn 5 chữ số bỏ vào 5 hộc còn lại có A_8^5 cách.

Vậy số các số thỏa yêu cầu bài toán :

$$5.A_8^5 = 5.\frac{8!}{3!} = 5 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 33\,600.$$ ■

Bài 59. Tính tổng các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được lập từ 1, 3, 4, 5, 7, 8.

Đại học Sư phạm Hà Nội 2 – 2001

Giải

Gọi $n = \overline{a_1a_2...a_5}$

Số các số n là $A_6^5 = \frac{6!}{1!} = 720$.

Xét các chữ số hàng đơn vị, mỗi chữ số 1, 3, 4, 5, 7, 8 xuất hiện

$$\frac{720}{6} = 120 \text{ lần.}$$

Vậy tổng các chữ số hàng đơn vị là :

$$120(1 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8) = 120 \times 28 = 3360.$$

Tương tự tổng chữ số hàng chục là : 3360×10

tổng chữ số hàng trăm là : 3360×10^2

tổng chữ số hàng ngàn là : 3360×10^3

tổng chữ số hàng vạn là : 3360×10^4

Do đó $S = 3360.(1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4)$

$= 3360 \times 11111 = 37\,332\,960.$ ■

BÀI TẬP

1 Cho 6 số 1, 2, 3, 4, 5, 6. Có thể tạo ra bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau. Trong đó có bao nhiêu số chia hết cho 5.

Cao đẳng Giao thông Vận tải 1999

2 Cho 8 chữ số 0, 1, 2, ..., 7 có thể lập bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 4.

Đại học Giao thông Vận tải 2001

3 Từ X = {0, 2, 4, 5, 6, 8, 9}. Có thể lập bao nhiêu số.

a) Có 3 chữ số khác nhau.

b) Có 4 chữ số khác nhau và có chữ số 5.

Đại học Lâm nghiệp 1997

4 Cho X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Có bao nhiêu số lập thành từ X gồm 4 chữ số khác nhau mà

a) Nhất thiết phải có mặt số 1.

b) Chữ số hàng ngàn là 7 và phải có mặt chữ số 2.

5 Cho các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Tìm số các số gồm 5 chữ số khác nhau mà không tận cùng bằng 3.

6 Hai đội bóng bàn A và B, mỗi đội gồm 5 tuyển thủ. Người ta muốn chọn ra 3 cặp đấu, mỗi tuyển thủ chỉ có thể đấu nhiều nhất một trận. Hỏi có bao nhiêu cách.

7 **a)** Tìm x thỏa $A_x^{10} + A_x^9 = 9A_x^8$.

b) Từ các số 1, 2, 3, 5, 7, 8 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau nhỏ hơn 276.

Cao đẳng Sư phạm TP. HCM khối D 2001

8 **a)** Có thể tìm bao nhiêu số gồm 3 chữ số khác nhau đôi một.

b) Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số đôi một khác nhau.

Đại học Kiến trúc TP. HCM 2001

9 Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau có chứa chữ số 4.

Hàng không Việt Nam 2001

10 **a)** Có bao nhiêu số khác nhau gồm 10 chữ số trong đó có 4 chữ số 2 và 6 chữ số 1.

b) Có bao nhiêu $\vec{a} = (x, y, z)$ khác nhau sao cho x, y, z là các số nguyên không âm thỏa $x + y + z = 10$.

Cao đẳng Kinh tế Đối ngoại 2001

Chương IV

TỔ HỢP

Có n vật khác nhau, chọn ra k vật khác nhau ($0 \le k \le n$) không để ý đến thứ tự chọn. Mỗi cách chọn như vậy gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.

Ta thấy mỗi tổ hợp chập k của n phần tử tạo ra được $P_k = k!$ chỉnh hợp chập k của n phần tử.

Do đó, nếu kí hiệu C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử, ta có :

$$\boxed{C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Tính chất : $\mathbf{C_n^k = C_n^{n-k}}$

$$\mathbf{C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k}$$

$$\mathbf{C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n}$$

Ví dụ 1. Có 5 học sinh, cần chọn ra 2 học sinh để đi trực lớp, hỏi có mấy cách chọn ?

Giải

Đây là tổ hợp chập 2 của 5 phần tử. Vậy có :

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5.4}{2} = 10 \text{ cách chọn.}$$

(Giả sử 5 học sinh là {a, b, c, d, e} thì 10 cách chọn là : {a, b}, {a, c}, {a, d}, {a, e}, {b, c}, {b, d}, {b, e}, {c, d}, {c, e}, {d, e}).

Ví dụ 2. Một nông dân có 6 con bò, 4 con heo. Một nông dân khác đến hỏi mua 4 con bò và 2 con heo. Hỏi có mấy cách chọn mua ?

Giải

Chọn mua 4 con bò trong 6 con bò là tổ hợp chập 4 của 6 phần tử, có : C_6^4 cách chọn.

Chọn mua 2 con heo trong 4 con heo là tổ hợp chập 2 của 4 phần tử, có : C_4^2 cách chọn.

Vậy, theo qui tắc nhân, số cách chọn mua bò và heo là :

$$C_6^4 \times C_4^2 = \frac{6!}{4!2!} \times \frac{4!}{2!2!} = \frac{6!}{(2!)^3} = \frac{6.5.4.3.2.1}{8}$$

$$= 6 \times 5 \times 3 = 90 \text{ cách chọn.}$$

Ví dụ 3. Trong một kì thi, mỗi sinh viên phải trả lời 3 trong 5 câu hỏi.

a) Có mấy cách chọn.

b) Có mấy cách chọn nếu trong 5 câu hỏi có 1 câu hỏi bắt buộc.

Giải

a) Chọn 3 trong 5 câu hỏi là tổ hợp chập 3 của 5 phần tử.

Vậy có : $C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5.4}{2} = 10$ cách chọn.

b) Ngoài câu hỏi bắt buộc, phải chọn thêm 2 trong 4 câu hỏi còn lại.

Đây là tổ hợp chập 2 của 4 phần tử. Vậy có :

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4.3}{2} = 6 \text{ cách chọn.}$$

Chú ý :

- Có thể xem một tổ hợp chập k của n phần tử là một tập con gồm k phần tử của tập n phần tử đã cho.
- Cần phân biệt trong mỗi bài toán chọn k vật từ n vật, có hay không hàm ý thứ tự. Nếu có thứ tự, đó là chỉnh hợp, nếu không có thứ tự, đó là tổ hợp.

Bài 60. Giải phương trình : $\frac{1}{C_4^x} - \frac{1}{C_5^x} = \frac{1}{C_6^x}$ (*)

Giải

Điều kiện : $x \in N$ và $x \leq 4$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{x!(4-x)!}{4!} - \frac{x!(5-x)!}{5!} = \frac{x!(6-x)!}{6!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(4-x)!}{4!} - \frac{(5-x)(4-x)!}{5 \times 4!} = \frac{(6-x)(5-x)(4-x)!}{6 \times 5 \times 4!} \quad (\text{do } x! > 0)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{5-x}{5} = \frac{(6-x)(5-x)}{30} \quad (\text{do } (4-x)! > 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad 30 - 6(5 - x) = 30 - 11x + x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 17x + 30 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 15 \text{ (loại so điều kiện } x \le 4) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2. \quad \blacksquare$$

Bài 61. Tìm n sao cho $\dfrac{C_{n-1}^{n-3}}{A_{n+1}^4} < \dfrac{1}{14P_3}$ (*)

Đại học Hàng hải 1999

Giải

Điều kiện : $n \in N$ và $n + 1 \ge 4 \Leftrightarrow n \in N$ và $n \ge 3$

$$(*) \Leftrightarrow \quad \frac{\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!2!}}{\dfrac{(n+1)!}{(n-3)!}} < \frac{1}{14 \times 3!} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(n-1)!}{2!} \times \frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{14 \times 6}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{(n+1)n} < \frac{1}{42} \quad \Leftrightarrow \quad n^2 + n - 42 < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -7 < n < 6$$

Do điều kiện $n \in N$ và $n \ge 3$ nên $n \in \{3, 4, 5\}$. ■

Bài 62. Tìm x thỏa: $\dfrac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \le \dfrac{6}{x}C_x^3 + 10.$

Đại học Bách khoa Hà Nội 2000

Giải

Điều kiện $x \in N$ và $x \ge 3$.

Bất phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x)!}{(2x-2)!} - \frac{x!}{(x-2)!} \le \frac{6}{x} \cdot \frac{x!}{3!(x-3)!} + 10$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}.2x(2x-1) - x(x-1) \le (x-1)(x-2) + 10$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 \le x^2 - 3x + 12 \quad \Leftrightarrow \quad x \le 4$$

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm bất phương trình là $x = 3 \vee x = 4$. ■

Bài 63. Tìm x, y thỏa $\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}$.

Đại học Bách khoa Hà Nội 2001

Giải

Điều kiện x, y ∈ N và x ≥ y.

Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} 4A_x^y + 10C_x^y = 180 \\ 25A_x^y - 10C_x^y = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 29A_x^y = 580 \\ 4A_x^y + 10C_x^y = 180 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_x^y = 20 \\ C_x^y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x!}{(x-y)!} = 20 \\ \dfrac{x!}{y!(x-y)!} = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x!}{(x-y)!} = 20 \\ \dfrac{20}{y!} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x!}{(x-y)!} = 20 \\ y! = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x!}{(x-2)!} = 20 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) = 20 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 20 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \vee x = -4 \text{ (e)} \\ y = 2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$ thỏa điều kiện x, y ∈ N và x ≥ y. ■

Bài 64. Cho k, n ∈ N thỏa n ≥ k ≥ 2.

Chứng minh : $k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$.

Đại học Quốc gia Hà Nội 1999

Giải

Ta có : $n(n-1)C_{n-2}^{k-2} = n(n-1)\dfrac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}$

$$n(n-1)C_{n-2}^{k-2} = \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} = \frac{k(k-1)n!}{k(k-1)(k-2)!(n-k)!}$$

$$= k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!} = k(k-1)C_n^k. \quad \blacksquare$$

Bài 65. Cho $4 \le k \le n$. Chứng minh :

$$C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^k.$$

Đại học Quốc gia TP. HCM 1997

Giải

Áp dụng tính chất của tổ hợp $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

Ta có : $C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4}$

$= (C_n^k + C_n^{k-1}) + 3(C_n^{k-1} + C_n^{k-2}) + 3(C_n^{k-2} + C_n^{k-3}) + C_n^{k-3} + C_n^{k-4}$

$= C_{n+1}^k + 3C_{n+1}^{k-1} + 3C_{n+1}^{k-2} + C_{n+1}^{k-3}$

$= (C_{n+1}^k + C_{n+1}^{k-1}) + 2(C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2}) + (C_{n+1}^{k-2} + C_{n+1}^{k-3})$

$= C_{n+2}^k + 2C_{n+2}^{k-1} + C_{n+2}^{k-2}$

$= (C_{n+2}^k + C_{n+2}^{k-1}) + (C_{n+2}^{k-1} + C_{n+2}^{k-2})$

$= C_{n+3}^k + C_{n+3}^{k-1} = C_{n+4}.$ ■

Bài 66. Tìm $k \in N$ sao cho $C_{14}^k + C_{14}^{k+2} = 2C_{14}^{k+1}$.

Cao đẳng Sư phạm TP. HCM 1998

Giải

Điều kiện $k \in N$ và $k \le 12$.

Ta có : $C_{14}^k + C_{14}^{k+2} = 2C_{14}^{k+1}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{14!}{k!(14-k)!} + \frac{14!}{(k+2)!(12-k)!} = 2\frac{14!}{(k+1)!(13-k)!}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{k!(14-k)!} + \frac{1}{(k+2)!(12-k)!} = \frac{2}{(k+1)!(13-k)!}$$

$$\Leftrightarrow \quad (k+2)(k+1) + (14-k)(13-k) = 2(k+2)(14-k)$$

$\Leftrightarrow \quad 2k^2 - 24k + 184 = 2(-k^2 + 12k + 28)$

$\Leftrightarrow \quad 4k^2 - 48k + 128 = 0$

$\Leftrightarrow \quad k = 8 \vee k = 4$ (nhận so điều kiện $k \in N$ và $k \le 12$). ■

Bài 67*. Chứng minh nếu $k \in N$ và $0 \le k < 2000$

$$C_{2001}^{k} + C_{2001}^{k+1} \le C_{2001}^{1000} + C_{2001}^{1001} \qquad (1)$$

Đại học Quốc gia Hà Nội khối A 2000

Giải

Do $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}$ nên (1) $\Leftrightarrow \quad C_{2002}^{k+1} \le C_{2002}^{1001}$

Xét dãy $\{u_k\} = C_{2002}^{k}$ với $k \in [0, 1000]$ đây là 1 dãy tăng vì

$$u_k \le u_{k+1} \Leftrightarrow C_{2002}^{k} \le C_{2002}^{k-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2002)!}{k!(2002-k)!} \le \frac{(2002)!}{(k+1)!(2001-k)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)!}{k!} \le \frac{(2002-k)!}{(2001-k)!}$$

$$\Leftrightarrow k + 1 \le 2002 - k$$

$$\Leftrightarrow 2k \le 2001 \quad \text{luôn đúng } \forall k \in [0, 1000].$$

Do đó :

$$u_{k+1} \le u_{k+2} \le \ldots \le u_{1001} \quad \text{nên} \quad C_{2002}^{k-1} \le C_{2002}^{1001} \quad \forall k \in [0, 1000]$$

Mặt khác do $C_{2002}^{k+1} = C_{2002}^{2001-k}$

nên khi $k \in [1001, 2000]$ thì $(2001 - k) \in [1, 1000]$

Bất đẳng thức (1) vẫn đúng.

Vậy (1) luôn đúng $\forall k \in [0, 2000]$. ■

Bài 68*. Với mọi $n, k \in N$ và $n \ge k \ge 0$. Chứng minh :

$$C_{2n+k}^{n} \cdot C_{2n-k}^{n} \le (C_{2n}^{n})^2.$$

Đại học Y dược TP. HCM 1998

Giải

Xét dãy số $\{u_k\} = C_{2n+k}^{n}.C_{2n-k}^{n}$ đây là dãy giảm vì $u_k \geq u_{k+1}$

$$\Leftrightarrow \quad C_{2n+k}^{n}.C_{2n-k}^{n} \geq C_{2n+k+1}^{n}.C_{2n-k-1}^{n}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(2n+k)!}{n!(n+k)!}\cdot\frac{(2n-k)!}{n!(n-k)!} \geq \frac{(2n+k+1)!}{n!(n+k+1)!}\cdot\frac{(2n-k-1)!}{n!(n-k-1)!}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(n+k+1)!}{(n+k)!}\cdot\frac{(2n-k)!}{(2n-k-1)!} \geq \frac{(2n+k+1)!}{(2n+k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k-1)!}.$$

$$\Leftrightarrow \quad (n+k+1)(2n-k) \geq (2n+k+1)(n-k)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2n^2 + nk - k^2 + 2n - k \geq 2n^2 - nk - k^2 + n - k$$

$\Leftrightarrow \quad 2nk + n \geq 0$ luôn đúng $\forall k, n \in N$

Do đó $\quad u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_k \geq u_{k+1} \ldots \geq u_n$

Vậy $\quad u_0 \geq u_k$

$$\Leftrightarrow \quad C_{2n+0}^{n}.C_{2n-0}^{n} \geq C_{2n+k}^{n}.C_{2n-k}^{n}. \quad \blacksquare$$

Bài 69. Cho n nguyên dương cố định và $k \in N$.

Chứng minh C_n^k lớn nhất nếu k không vượt quá $\frac{n+1}{2}$.

Đại học Sư phạm Vinh 2001

Giải

Do C_n^k có tính đối xứng, nghĩa là $C_n^k = C_n^{n-k}$, ta có :

$$C_n^0 = C_n^n, \quad C_n^1 = C_n^{n-1}, \quad C_n^2 = C_n^{n-2} \ldots$$

$$\text{Vậy} \quad C_n^k \max \Leftrightarrow \begin{cases} C_n^k \geq C_n^{k+1} \\ C_n^k \geq C_n^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \geq \dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \geq \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(k+1)!}{k!} \geq \dfrac{(n-k)!}{(n-k-1)!} \\ \dfrac{(n-k+1)!}{(n-k)!} \geq \dfrac{k!}{(k-1)!} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+1 \geq n-k \\ n-k+1 \geq k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \dfrac{n-1}{2} \\ k \leq \dfrac{n+1}{2} \end{cases}$$

Do đó k không vượt quá $\frac{n+1}{2}$. $\blacksquare$

Bài 70. Cho m, n ∈ N với 0 < m < n. Chứng minh :

a) $mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}$

b) $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-2}^{m-1} + ... + C_m^{m-1} + C_{m-1}^{m-1}$.

Trung tâm Bồi dưỡng Cán bộ Y tế TP. HCM 1998

Giải

a) Ta có : $nC_{n-1}^{m-1} = n\dfrac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} = \dfrac{n!}{(m-1)!(n-m)!}$

$$= \frac{m.n!}{m(m-1)!(n-m)!} = m.\frac{n!}{m!(n-m)!} = m.C_n^m.$$

b) Với k ∈ N và k ≥ m. Ta có

$C_k^m = C_{k-1}^m + C_{k-1}^{m-1} \Leftrightarrow C_{k-1}^{m-1} = C_k^m - C_{k-1}^m$

Với k = n ta có $C_{n-1}^{m-1} = C_n^m - C_{n-1}^m$ (1)

Với k = n − 1 ta có $C_{n-1}^{m-1} = C_{n-1}^m - C_{n-2}^m$ (2)

Với k = n − 2 ta có $C_{n-3}^{m-1} = C_{n-2}^m - C_{n-3}^m$ (3)

. . . .

. . . .

Với k = m + 1 ta có $C_m^{m-1} = C_{m+1}^m - C_m^m$ (n − m − 1)

và $C_{m-1}^{m-1} = C_m^m = 1$.

Cộng vế theo vế các đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh. ■

Bài 71. Chứng minh :

$$C_{2002}^0.C_{2002}^{2001} + C_{2002}^1.C_{2001}^{2000} + ... + C_{2002}^k.C_{2002-k}^{2001-k} + ... + C_{2002}^{2001}.C_1^0 = 1001.2^{2002}.$$

Trung tâm Bồi dưỡng Cán bộ Y tế TP. HCM 2001

Giải

$$\text{Vế trái} = \sum_{k=0}^{2001} C_{2002}^k.C_{2002-k}^{2001-k} = \sum_{k=0}^{2001} \frac{2002!}{k!(2002-k)!}.\frac{(2002-k)!}{(2001-k)!1!}$$

$$= \sum_{k=0}^{2001} \frac{2002!}{k!(2001-k)!} = \sum_{k=0}^{2001} \frac{2002.2001!}{k!(2001-k)!}$$

$$= 2002\sum_{k=0}^{2001} C_{2001}^{k} = 2002.2^{2001} \quad (\text{do } \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n)$$

$$= 1001.2^{2002} = \text{Vế phải.}$$ ■

Bài 72. Đề thi trắc nghiệm có 10 câu hỏi, học sinh cần chọn trả lời 8 câu.

a) Hỏi có mấy cách chọn tùy ý ?

b) Hỏi có mấy cách chọn nếu 3 câu đầu là bắt buộc ?

c) Hỏi có mấy cách chọn 4 trong 5 câu đầu và 4 trong 5 câu sau ?

Giải

a) Chọn tùy ý 8 trong 10 câu là tổ hợp chập 8 của 10 phần tử, có :

$$C_{10}^{8} = \frac{10!}{8!2!} = \frac{10.9}{2} = 45 \text{ cách.}$$

b) Vì có 3 câu bắt buộc nên phải chọn thêm 5 câu trong 7 câu còn lại, đây là tổ hợp chập 5 của 7 phần tử, có :

$$C_{7}^{5} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7.6}{2} = 21 \text{ cách.}$$

c) Chọn 4 trong 5 câu đầu, có C_5^4 cách. Tiếp theo, chọn 4 trong 5 câu sau, có C_5^4 cách. Vậy, theo qui tắc nhân, có :

$$C_5^4.C_5^4 = \left(\frac{5!}{4!1!}\right)^2 = 25 \text{ cách.}$$ ■

Bài 73. Có 12 học sinh ưu tú. Cần chọn ra 4 học sinh để đi dự đại hội học sinh ưu tú toàn quốc. Có mấy cách chọn :

a) Tùy ý ?

b) Sao cho 2 học sinh A và B không cùng đi ?

c) Sao cho 2 học sinh A và B cùng đi hoặc cùng không đi ?

Giải

a) Chọn tùy ý 4 trong 12 học sinh, là tổ hợp chập 4 của 12 phần tử.

Vậy, có :

$$C_{12}^4 = \frac{12!}{4!8!} = \frac{12.11.10.9}{2.3.4} = 11.5.9 = 495 \text{ cách.}$$

b) * ***Cách 1 :***

Nếu A, B cùng không đi, cần chọn 4 trong 10 học sinh còn lại. Đây là tổ hợp chập 4 của 10 phần tử, có :

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10.9.8.7}{2.3.4} = 10.3.7 = 210 \text{ cách.}$$

Nếu A đi, B không đi, cần chọn thêm 3 trong 10 học sinh còn lại có :

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10.9.8}{2.3} = 5.3.8 = 120 \text{ cách.}$$

Tương tự, nếu B đi, A không đi, có : 120 cách.

Vậy, số cách chọn theo yêu cầu là :

$$210 + 120 + 120 = 450 \text{ cách.}$$

* ***Cách 2 :***

Nếu A và B cùng đi, cần chọn thêm 2 trong 10 học sinh còn lại, có :

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = 9.5 = 45 \text{ cách.}$$

Suy ra, số cách chọn theo yêu cầu là :

$$495 - 45 = 450 \text{ cách.}$$

c) A và B cùng đi, có $C_{10}^2 = 45$ cách.

A và B cùng không đi, có $C_{10}^4 = 210$ cách.

Vậy có : $45 + 210 = 255$ cách. ■

Bài 74. Một phụ nữ có 11 người bạn thân trong đó có 6 nữ. Cô ta định mời ít nhất 3 người trong 11 người đó đến dự tiệc. Hỏi :

a) Có mấy cách mời ?

b) Có mấy cách mời để trong buổi tiệc gồm cô ta và các khách mời, số nam nữ bằng nhau.

Giải

a) Mời 3 người trong 11 người, có : C_{11}^3 cách.

Mời 4 người trong 11 người, có : C_{11}^4 cách.

Lập luận tương tự khi mời 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 trong 11 người.

Vậy, có :

$$C_{11}^3 + C_{11}^4 + ... + C_{11}^{11} = (C_{11}^0 + C_{11}^1 + ... + C_{11}^{11}) - (C_{11}^0 + C_{11}^1 + C_{11}^2)$$

$$= 2^{11} - 1 - 11 - 55 = 1981 \text{ cách.}$$

b) Mời 1 nữ trong 6 nữ, 2 nam trong 5 nam, có : $C_6^1.C_5^2$ cách.

Mời 2 nữ trong 6 nữ, 3 nam trong 5 nam, có : $C_6^2.C_5^3$ cách.

Mời 3 nữ trong 6 nữ, 4 nam trong 5 nam, có : $C_6^3.C_5^4$ cách.

Mời 4 nữ trong 6 nữ, 5 nam trong 5 nam, có : $C_6^4.C_5^5$ cách.

Vậy, có : $C_6^1.C_5^2 + C_6^2.C_5^3 + C_6^3.C_5^4 + C_6^4.C_5^5 = 325$ cách. ■

Bài 75. Một tổ có 12 học sinh. Thầy giáo có 3 đề kiểm tra khác nhau. Cần chọn 4 học sinh cho mỗi đề kiểm tra. Hỏi có mấy cách chọn ?

Giải

Đầu tiên, chọn 4 trong 12 học sinh cho đề một, có C_{10}^4 cách.

Tiếp đến, chọn 4 trong 8 học sinh còn lại cho đề hai, có C_8^4 cách.

Các học sinh còn lại làm đề ba.

Vậy, có : $$C_{12}^4.C_8^4 = \frac{12!}{4!8!}\cdot\frac{8!}{4!4!} = \frac{12.11.10.9}{2.3.4}\cdot\frac{8.7.6.5}{2.3.4}$$

$$= (11.5.9).(7.2.5) = 34650 \text{ cách.}$$ ■

Bài 76. Có 12 học sinh ưu tú của một trường trung học. Muốn chọn một đoàn đại biểu gồm 5 người (gồm một trưởng đoàn, một thư ký, và ba thành viên) đi dự trại quốc tế. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ? Có giải thích ?

Đại học Quốc gia TP. HCM 1997

Giải

Số cách chọn 1 trưởng đoàn : 12

Số cách chọn 1 thư ký : 11

Số cách chọn 3 thành viên : $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10.9.8}{6} = 120$

Số cách chọn đoàn đại biểu : $12 \times 11 \times 120 = 15\,840$. ■

Bài 77. Một đoàn tàu có 3 toa chở khách; toa I, II, III. Trên sân ga có 4 hành khách chuẩn bị đi tàu. Biết rằng mỗi toa có ít nhất 4 chỗ trống. Hỏi :

a) Có bao nhiêu cách sắp 4 hành khách lên 3 toa.

b) Có bao nhiêu cách sắp 4 hành khác lên tàu để có 1 toa trong đó có 3 trong 4 vị khách.

Đại học Luật Hà Nội 1999

Giải

a) Đoàn tàu có 3 toa; hành khách lên 3 toa nghĩa là lên tàu.

Mỗi khách có 3 cách lên toa I hoặc II hoặc III. Vậy số cách sắp 4 khách lên 3 toa là :

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81 \text{ cách.}$$

b) Số cách sắp 3 khách lên toa I : $C_4^3 = \frac{4!}{3!} = 4$.

Số cách sắp 1 khách còn lại lên toa II hoặc III : 2.

Vậy nếu 3 khách ở toa I thì có : $4 \times 2 = 8$ cách.

Lập luận tương tự nếu 3 khách ở toa II, hoặc III cũng là 8.

Vậy số cách thỏa yêu cầu bài toán :

$$8 + 8 + 8 = 24 \text{ cách.}$$ ■

Bài 78. Có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu khó, 10 câu trung bình và 15 câu dễ. Từ 30 câu đó có thể lập bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu khác nhau, sao cho mỗi đề phải có 3 loại (khó, trung bình, dễ) và số câu dễ không ít hơn 2 ?

Tuyển sinh khối B 2004

Giải

Số đề thi gồm 2 câu dễ, 2 câu trung bình và 1 câu khó

$$C_{15}^2 . C_{10}^2 . 5 = \frac{15!}{2!13!} \cdot \frac{10!}{2!8!} \times 5 = 23625.$$

Số đề thi gồm 2 câu dễ, 1 câu trung bình và 2 câu khó

$$C_{15}^2 \times 10 \times C_5^2 = 10 . \frac{15!}{2!3!} \cdot \frac{5!}{2!3!} = 10500$$

Số đề thi gồm 3 câu dễ, 1 câu trung bình và 1 câu khó

$$C_{15}^3 \times 10 \times 5 = \frac{15!}{3!12!} \times 50 = 22750$$

Vì các cách chọn đôi một khác nhau, nên số đề kiểm tra là :

$$23\,625 + 10\,500 + 22\,750 = 56875. \quad ■$$

Bài 79. Một chi đoàn có 20 đoàn viên trong đó 10 nữ. Muốn chọn 1 tổ công tác có 5 người. Có bao nhiêu cách chọn nếu tổ cần ít nhất 1 nữ.

Đại học Y Hà Nội 1998

Giải

Số cách chọn 5 đoàn viên bất kì C_{20}^5.

Số cách chọn 5 đoàn viên toàn là nam C_{10}^5.

Vậy số cách chọn có ít nhất 1 nữ là :

$$C_{20}^5 - C_{10}^5 = \frac{20!}{5!15!} - \frac{10!}{5!5!} = 15252 \text{ cách.} \quad ■$$

Bài 80. Một đội xây dựng gồm 10 công nhân, 3 kỹ sư. Để lập 1 tổ công tác cần chọn 1 kỹ sư là tổ trưởng, 1 công nhân làm tổ phó và 3 công nhân làm tổ viên. Hỏi có bao nhiêu cách lập tổ công tác.

Đại học Kiến trúc Hà Nội 1998

Giải

Số cách chọn 1 kỹ sư làm tổ trưởng : 3

Số cách chọn 1 công nhân làm tổ phó : 10

Số cách chọn 3 công nhân làm tổ viên : C_9^3.

Vậy số cách lập tổ : $3 \times 10 \times C_9^3 = 3 \times 10 \times \frac{9!}{3!6!} = 2520.$ ■

Bài 81. Một đội văn nghệ gồm 10 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Cô giáo muốn chọn ra 1 tốp ca gồm 5 em trong đó có ít nhất là 2 em nam và 2 em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

Cao đẳng Sư phạm Hà Nội 1999

Giải

Số cách chọn 3 em nam và 2 em nữ : $C_{10}^3.C_{10}^2$

Số cách chọn 2 em nam và 3 em nữ : $C_{10}^2.C_{10}^3$

Vậy số cách thỏa cầu bài toán là :

$$2C_{10}^3.C_{10}^2 = 2\frac{10!}{3!7!}\cdot\frac{10!}{2!8!} = 2\frac{10\times9\times8}{6}\cdot\frac{10\times9}{2} = 10.800. \quad ■$$

Bài 82. Một đội cảnh sát gồm có 9 người. Trong ngày cần 3 người làm nhiệm vụ tại địa điểm A, 2 người làm tại B còn lại 4 người trực đồn. Hỏi có bao nhiêu cách phân công ?

Học viện Kỹ thuật Quân sự 2000

Giải

Số cách phân công 3 người tại A : C_9^3

Số cách phân công 2 người tại B : C_6^2

Số cách phân công 4 người còn lại : 1.

Vậy số cách phân công là :

$$C_9^3.C_6^2 = \frac{9!}{3!6!}\cdot\frac{6!}{2!4!} = \frac{9!}{3!2!4!} = \frac{9\times8\times7\times6\times5}{6\times2} = 1260. \quad ■$$

Bài 83. Có 5 nhà Toán học nam, 3 nhà Toán học nữ và 4 nhà Vật lí nam. Muốn lập 1 đoàn công tác có 3 người gồm cả nam lẫn nữ, cần có cả nhà toán học lẫn vật lí. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

Đại học Y Hà Nội 2000

Giải

Số cách chọn 2 nhà Toán học nữ và 1 nhà Vật lí nam là :

$$C_3^2\times4 = \frac{3!}{2!}\times4 = 12$$

Số cách chọn 1 nhà Toán học nữ và 2 nhà Vật lí nam là :

$$3 \times C_4^2 = 3 \times \frac{4!}{2!2!} = \frac{3.4.3}{2} = 18$$

Số cách chọn 1 nhà Toán học nữ, 1 nhà Toán học nam và 1 nhà Vật lí nam là :

$$5 \times 3 \times 4 = 60$$

Vậy có cách chọn đoàn công tác là : 12 + 18 + 60 = 90. ■

Bài 84. Một đội văn nghệ có 10 người trong đó có 6 nữ và 4 nam. Có bao nhiêu cách chia đội văn nghệ :

a) Thành 2 nhóm có số người bằng nhau và mỗi nhóm có số nữ bằng nhau.

b) Có bao nhiêu cách chọn 5 người trong đó không quá 1 nam.

Học viện Chính trị 2001

Giải

a) Do mỗi nhóm có số người bằng nhau nên mỗi nhóm phải có 5 người.

Do số nữ bằng nhau nên mỗi nhóm phải có 3 nữ.

Vậy mỗi nhóm phải có 3 nữ và 2 nam.

Số cách chọn là :

$$C_6^3 . C_4^2 = \frac{6!}{3!3!} \times \frac{4!}{2!2!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{6} \times \frac{4 \times 3}{2} = 20 \times 6 = 120.$$

b) Số cách chọn 5 người toàn nữ là : $C_6^5 = \frac{6!}{5!} = 6$.

Số cách chọn 4 nữ và 1 nam là : $C_6^4 \times 4 = \frac{6!}{4!2!} \times 4 = \frac{6 \times 5}{2} \times 4 = 60$

Vậy số cách chọn 5 người mà không quá 1 nam : 6 + 60 = 66. ■

Bài 85. Có 5 tem thư khác nhau và 6 bì thư cũng khác nhau. Người ta muốn chọn từ đó ra 3 tem thư, 3 bì thư và dán 3 tem thư đó lên 3 bì thư đã chọn. Một bì thư chỉ dán 1 tem thư. Hỏi có bao nhiêu cách làm như vậy.

Tú tài 1999

Giải

Số cách chọn 3 tem từ 5 tem là $C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$.

Số cách chọn 3 bì thư từ 6 bì thư là $C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = 20$.

Do các tem đều khác nhau, các bì thư cũng khác nhau, nên số cách dán 3 tem lên 3 bì thư là $3! = 6$.

Vậy số cách làm là : $C_5^3 . C_6^3 . 3! = 10.20.6 = 1200$ cách. ■

Bài 86. Một bộ bài có 52 lá; có 4 loại : cơ, rô, chuồn, bích mỗi loại có 13 lá. Muốn lấy ra 8 lá bài trong đó 1 phải có đúng lá cơ, đúng 3 lá rô và không quá 2 lá bích. Hỏi có mấy cách ?

Giải

Số cách chọn 1 lá cơ và 3 lá rô : $C_{13}^1 . C_{13}^3$ cách.

- Trường hợp 1 : Chọn tiếp 4 lá chuồn (nghĩa là không có lá bích nào) có : C_{13}^4 cách.
- Trường hợp 2 : Chọn tiếp 1 lá bích và 3 lá chuồn có : $13.C_{13}^3$ cách.
- Trường hợp 3 : Chọn tiếp 2 lá bích và 2 lá chuồn có : $C_{13}^2 . C_{13}^2$ cách.

Vậy số cách chọn thỏa yêu cầu đề toán :

$$13.C_{13}^3(C_{13}^4 + 13.C_{13}^3 + C_{13}^2 . C_{13}^2) = 39\,102\,206 \text{ cách.}$$ ■

Bài 87. Có 2 đường thẳng song song (d_1) và (d_2). Trên (d_1) lấy 15 điểm phân biệt. Trên (d_2) lấy 9 điểm phân biệt. Hỏi số tam giác mà có 3 đỉnh là các điểm đã lấy.

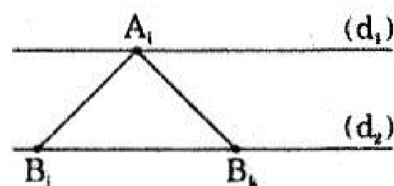
Giải

Có hai loại tam giác tạo thành.

a) Một đỉnh trên (d_1) và 2 đỉnh trên (d_2)

Có 15 cách lấy 1 đỉnh trên (d_1)

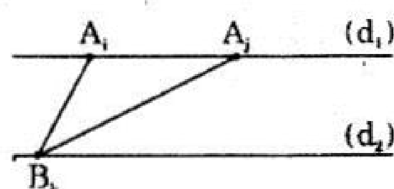
Có C_9^2 cách lấy 2 đỉnh trên (d_2).



b) Hai đỉnh trên (d_1) và 1 đỉnh trên (d_2)

Có C_{15}^2 cách lấy 2 đỉnh trên (d_1)

9 cách lấy 1 đỉnh trên (d_2).



Vậy số tam giác tạo thành :

$$15C_9^2 + 9C_{15}^2 = 15.\frac{9!}{2!7!} + 9\frac{15!}{2!13!} = 540 + 945 = 1485. \blacksquare$$

Bài 88. Một lớp có 20 học sinh trong đó có 2 cán bộ lớp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 3 người đi dự hội nghị của trường sao cho trong đó có ít nhất 1 cán bộ lớp.

Đại học Giao thông Vận tải 2000

Giải

Số cách chọn 3 người trong đó có 1 cán bộ lớp

$$2 \times C_{18}^2 = 2 \times \frac{18!}{2!16!} = 18 \times 17$$

Số cách chọn 3 người trong đó có 2 cán bộ lớp

$$1C_{18}^1 = 18$$

Vậy số cách chọn thỏa yêu cầu bài toán là :

$$18 \times 17 + 18 = 18^2 = 324. \blacksquare$$

Bài 89. Có 16 học sinh gồm 3 học sinh giỏi, 5 khá, 8 trung bình. Có bao nhiêu cách chia số học sinh thành 2 tổ, mỗi tổ có 8 người, đều có học sinh giỏi và ít nhất 2 học sinh khá.

Học viện Quân sự 2001

Giải

Vì mỗi tổ đều có học sinh giỏi nên số học sinh giỏi mỗi tổ là 1 hay 2.

Vì mỗi tổ đều có ít nhất 2 học sinh khá nên số học sinh khá mỗi tổ 2 hay 3.

Do đó nếu xem số học sinh giỏi, khá, trung bình mỗi tổ là tọa độ một vectơ 3 chiều ta có 4 trường hợp đối với tổ 1 là (1, 2, 5), (1, 3, 4), (2, 2, 4), (2, 3, 3).

Tương ứng 4 trường hợp đối với tổ 2 là : (2, 3, 3), (2, 2, 4), (1, 3, 4), (1, 2, 5).

Ta thấy có 2 trường hợp bị trùng. Vậy chỉ có hai trường hợp là :

Trường hợp 1 :

Số cách chọn một tổ nào đó có 1 giỏi, 2 khá và 5 trung bình là :

$$3 \times C_5^2 \times C_8^5$$

Vậy tổ còn lại có 2 giỏi, 3 khá, 3 trung bình thỏa yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2 :

Số cách chọn một tổ có 1 giỏi, 3 khá và 4 trung bình là :

$$3 \times C_5^3 \times C_8^4$$

Vậy tổ còn lại có 2 giỏi, 2 khá và 4 trung bình thỏa yêu cầu bài toán.

Do đó số cách chia học sinh làm 2 tổ thỏa yêu cầu bài toán là :

$$3C_5^2C_8^5 + 3C_5^3C_8^4 = 3\left(\frac{5!}{2!3!}\cdot\frac{8!}{5!3!} + \frac{5!}{3!2!}\cdot\frac{8!}{4!4!}\right) = 3780. \quad \blacksquare$$

Bài 90. Một người có 12 cây giống trong đó có 6 cây xoài, 4 cây mít và 2 cây ổi. Người đó muốn chọn 6 cây giống để trồng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho

a) Mỗi loại có đúng 2 cây. **b)** Mỗi loại có ít nhất 1 cây.

Trường Hàng không 2000

Giải

a) Số cách chọn 2 cây xoài trong 6 cây xoài : C_6^2

Số cách chọn 2 cây mít trong 4 cây mít : C_4^2

Số cách chọn 2 cây ổi trong 2 cây ổi : 1

Vậy số cách chọn mà mỗi loại đúng 2 cây : $C_6^2.C_4^2 = 90$ cách.

b) Chọn 1 cây ổi, 4 mít, 1 xoài : $2 \times 1 \times 6 = 12$ cách.

Chọn 1 ổi, 3 mít và 2 xoài có : $2C_4^3.C_6^2 = 2 \times 4 \times 15 = 120$ cách.

Chọn 1 ổi, 2 mít và 3 xoài có : $2C_4^2.C_6^3 = 240$ cách.

Chọn 1 ổi, 1 mít và 4 xoài có : $2 \times 4 \times C_6^4 = 120$ cách.

Chọn 2 ổi, 3 mít và 1 xoài có : $1 \times C_4^3 \times 6 = 24$ cách.

Chọn 2 ổi, 2 mít và 2 xoài có : $1 \times C_4^2 \times C_6^2 = 90$ cách.

Chọn 2 ổi, 1 mít và 3 xoài có : $1 \times 4 \times C_6^3 = 80$ cách.

Vậy số cách chọn mà mỗi loại có ít nhất 1 cây là :

$$12 + 120 + 240 + 120 + 24 + 90 + 80 = 686 \text{ cách.} \blacksquare$$

Bài 91. Một lớp học có 30 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Có 6 học sinh được chọn để lập 1 tốp ca. Hỏi có bao nhiêu cách chọn khác nhau phải có ít nhất 2 nữ.

Đại học Huế 2000

Giải

Số cách chọn 6 học sinh bất kì nam hay nữ : $C_{45}^6 = \dfrac{45!}{6!39!} = 8145060$.

Số cách chọn 6 học sinh toàn nam : $C_{30}^6 = \dfrac{30!}{6!24!} = 593775$.

Số cách chọn 5 nam và 1 nữ : $C_{30}^5 \times 15 = \dfrac{30!}{25!5!} \times 15 = 2137590$.

Vậy có số cách chọn 6 học sinh trong đó phải có ít nhất 2 nữ

$$C_{45}^6 - (C_{30}^6 + 15C_{30}^5) = 5413695 \text{ cách.} \blacksquare$$

Bài 92. Cho tập con gồm 10 phần tử khác nhau. Tìm số tập con khác rỗng chứa 1 số chẵn các phần tử.

Đại học Nông nghiệp khối B 2000

Giải

Khi tập X có n phần tử thì số tập con của X có k phần tử là C_n^k

Do đó n = 10 thì :

Số tập con của X có 2 phần tử là C_{10}^2

Số tập con của X có 4 phần tử là C_{10}^4

Số tập con của X có 6 phần tử là C_{10}^6

Số tập con của X có 8 phần tử là C_{10}^8

Số tập con của X có 10 phần tử là C_{10}^{10}.

Vậy số tập con thỏa yêu cầu bài toán là :

$$S = C_{10}^{2} + C_{10}^{4} + C_{10}^{6} + C_{10}^{8} + C_{10}^{10}$$

$$\Leftrightarrow \quad S = 2C_{10}^{2} + 2C_{10}^{4} + 1 \quad (\text{do } C_{10}^{2} = C_{10}^{8} \text{ và } C_{10}^{4} = C_{10}^{6})$$

$$\Leftrightarrow \quad S = 2.\frac{10!}{2!8!} + 2\frac{10!}{4!6!} + 1 = 511. \quad ■$$

Bài 93. Một tổ sinh viên có 20 em. Trong đó chỉ có 8 em biết nói tiếng Anh, 7 em biết tiếng Pháp và 5 em chỉ biết tiếng Đức. Cần chọn 1 nhóm đi thực tế gồm 3 em biết tiếng Anh, 4 em biết tiếng Pháp và 2 em biết tiếng Đức. Hỏi có bao nhiêu cách lập nhóm.

Đại học Sư phạm Vinh 1999

Giải

Số cách lập nhóm sinh viên biết tiếng Anh : C_8^3

Số cách lập nhóm sinh viên biết tiếng Pháp : C_7^4

Số cách lập nhóm sinh viên biết tiếng Đức : C_5^2.

Vậy số cách lập thỏa yêu cầu bài toán là :

$$C_8^3 \times C_7^4 \times C_5^2 = \frac{8!}{3!5!} \times \frac{7!}{4!3!} \times \frac{5!}{2!3!} = 1960 \text{ cách.} \quad ■$$

Bài 94. Trong 1 hộp có 7 quả cầu xanh, 5 quả cầu đỏ và 4 quả cầu vàng, các quả cầu đều khác nhau. Chọn ngẫu nhiên 4 quả cầu trong hộp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho trong 4 quả cầu chọn ra có đủ 3 màu.

Đại học Nông lâm khối D 2001

Giải

Số cách chọn 2 quả cầu xanh, 1 đỏ, 1 vàng là $: C_7^2 . C_5^1 . C_4^1 = 420$

Số cách chọn 1 quả cầu xanh, 2 đỏ và 1 vàng là $: C_7^1 . C_5^2 . C_4^1 = 280$

Số cách chọn 1 quả cầu xanh, 1 đỏ và 2 vàng là $: C_7^1 . C_5^1 . C_4^2 = 210$

Vậy số cách chọn 4 quả cầu đủ 3 màu là :

$$420 + 280 + 210 = 910. \quad ■$$

Bài 95. Một hộp chứa 6 bi trắng và 5 bi đen. Hỏi có mấy cách lấy ra 4 bi :

a) màu tùy ý ? **b)** gồm 2 bi trắng và 2 bi đen ?

Giải

a) Lấy ra 4 bi màu tùy ý từ 11 bi là tổ hợp chập 4 của 11 phần tử.

Vậy có : $C_{11}^4 = \dfrac{11!}{4!7!} = \dfrac{8.9.10.11}{2.3.4} = 3.10.11 = 330$ cách.

b) Lấy ra 2 bi trắng trong 6 bi trắng là tổ hợp chập 2 của 6 phần tử.
Lấy ra 2 bi đen trong 5 bi đen là tổ hợp chập 2 của 5 phần tử.

Vậy số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán là :

$$C_6^2.C_5^2 = \frac{6!}{2!4!}.\frac{5!}{2!3!} = 15.10 = 150 \text{ cách.} \blacksquare$$

Bài 96. Một hộp có 6 quả cầu xanh đánh số từ 1 đến 6,

5 quả cầu đỏ đánh số từ 1 đến 5,

4 quả cầu vàng đánh số từ 1 đến 4.

a) Có bao nhiêu cách lấy 3 quả cầu cùng màu, 3 quả cầu cùng số.

b) Có bao nhiêu cách lấy 3 quả cầu khác màu ? 3 quả cầu khác màu và khác số.

Đại học Dân lập Thăng Long 1999

Giải

a) • Số cách lấy 3 quả cầu cùng xanh : $C_6^3 = \dfrac{6!}{3!3!} = 20$

Số cách lấy 3 quả cầu cùng đỏ : $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!2!} = 10$

Số cách lấy 3 quả cầu cùng vàng : $C_4^3 = \dfrac{4!}{3!} = 4$

Vậy số cách lấy 3 quả cầu cùng màu : $C_6^3 + C_5^3 + C_4^3 = 34$.

• Số cách lấy 3 quả cầu cùng số 1 : 1

Số cách lấy 3 quả cầu cùng số 2 : 1

Số cách lấy 3 quả cầu cùng số 3 : 1

Số cách lấy 3 quả cầu cùng số 4 : 1

Vậy số cách lấy 3 quả cầu cùng số : 4.

b) • Số cách lấy 1 quả cầu xanh : 6

Số cách lấy 1 quả cầu đỏ : 5

Số cách lấy 1 quả cầu vàng : 4

Vậy số cách lấy 3 quả cầu khác màu : $6 \times 5 \times 4 = 120$.

• Chọn bất kì 1 quả cầu vàng V_i $(i = \overline{1,4})$ có 4 cách

sau đó chọn 1 quả cầu đỏ $Đ_j$ $(j = \overline{1,5}$ và $j \neq i)$ có 4 cách

chọn 1 quả cầu xanh X_k $(k = \overline{1,6}$ và $k \neq j, i)$ có 4 cách

Do đó chọn 3 bi khác màu và khác số có

$4 \times 4 \times 4 = 64$ cách. ■

Bài 97. Có 9 viên bi xanh, 5 đỏ, 4 vàng có kích thước đôi một khác nhau. Có bao nhiêu cách chọn ra :

a) 6 viên bi trong đó có đúng 2 viên bi đỏ,

b) 6 viên bi trong đó số bi xanh bằng số bi đỏ.

Đại học Cần Thơ 2000

Giải

a) Số cách chọn 2 bi đỏ : C_5^2

Số cách chọn 4 bi xanh hay vàng : C_{13}^4

Vậy số cách chọn 6 bi có đúng 2 bi đỏ

$$C_5^2 . C_{13}^4 = \frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{13!}{4!9!} = \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10}{4 \times 3 \times 2} = 7150.$$

b) Số cách chọn 1 bi xanh, 1 bi đỏ, 4 bi vàng : $9 \times 5 \times 1 = 45$.

Số cách chọn 2 bi xanh, 2 bi đỏ, 2 bi vàng :

$$C_9^2 . C_5^2 . C_4^2 = \frac{9!}{2!7!} \cdot \frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{4!}{2!2!} = 2160.$$

Số cách chọn 3 bi xanh và 3 bi đỏ :

$$C_9^3 . C_5^3 = \frac{9!}{3!6!} \cdot \frac{5!}{3!2!} = 840.$$

Vậy số cách chọn 6 bi mà số bi xanh bằng bi đỏ :

$$45 + 2160 + 840 = 3045.$$ ■

Bài 98. Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng và 4 bông hồng đỏ (các bông hoa xem như đôi một khác nhau). Người ta muốn chọn ra 1 bó hoa gồm 7 bông. Có bao nhiêu cách chọn 1 bó hoa trong đó :

a) Có đúng 1 bông hồng đỏ.

b) Có ít nhất 3 bông hồng vàng và ít nhất 3 bông hồng đỏ.

Đại học Quốc gia TP. HCM khối D 2000

Giải

a) Số cách chọn 1 bông hồng đỏ : 4

Số cách chọn 6 bông còn lại (vàng hay trắng) : C_8^6

Vậy số cách chọn đúng 1 bông đỏ : $4C_8^6 = 112$.

b) Số cách chọn 3 bông vàng, 3 bông đỏ, 1 bông trắng :

$$C_5^3 \times C_4^3 \times 3 = 120$$

Số cách chọn 4 bông vàng và 3 bông đỏ :

$$C_5^4 \times C_4^3 = 20$$

Số cách chọn 3 bông vàng và 4 bông đỏ :

$$C_5^3 \times C_4^4 = 10$$

Vậy số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán là :

$$120 + 20 + 10 = 150 \text{ cách.}$$ ■

Bài 99. Xếp 3 bi đỏ có bán kính khác nhau và 3 bi xanh giống nhau vào 1 hộc có 7 ô trống.

a) Hỏi có mấy cách xếp khác nhau.

b) Có bao nhiêu cách xếp khác nhau sao cho 3 bi đỏ xếp cạnh nhau và 3 bi xanh xếp cạnh nhau.

Học viện Quân Y 2000

Giải

a) Xếp 3 bi đỏ khác nhau vào hộc có 7 ô trống có : A_7^3 cách.

Còn 4 ô trống xếp 3 bi xanh giống nhau vào có C_4^3 cách.

Vậy có : $A_7^3 . C_4^3 = \dfrac{7!}{4!} \times \dfrac{4!}{3!1!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ cách.

b) Số cách xếp 3 bi đỏ đứng cạnh nhau : 3!

Số cách xếp 3 bi xanh đứng cạnh nhau : 1

Số cách xếp 2 loại bi đỏ, xanh vào để ô thứ 1 trống : 2!

Số cách xếp 2 loại bi đỏ, xanh vào để ô thứ 4 trống : 2!

Số cách xếp 2 loại bi đỏ, xanh vào để ô thứ 7 trống : 2!

	×	×	×	0	0	0

×	×	×		0	0	0

×	×	×	0	0	0	

Vậy số cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán là :

$$3! \times 2 \times 2 \times 2 = 48 \text{ cách.}$$ ■

Bài 100. Một hộp đựng 4 bi đỏ, 5 bi trắng và 6 bi vàng. Người ta chọn 4 bi từ hộp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để số bi lấy ra không đủ 3 màu.

Đại học Huế 1999

Giải

Số cách chọn 4 bi bất kì trong 15 bi trên là :

$$C_{15}^4 = \frac{15!}{4!11!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12}{24} = 1365.$$

Số cách chọn 2 bi đỏ, 1 bi trắng, 1 bi vàng :

$$C_4^2 \times 5 \times 6 = \frac{4!}{2!2!} \times 30 = 180$$

Số cách chọn 1 bi đỏ, 2 bi trắng, 1 bi vàng :

$$4 \times C_5^2 \times 6 = 24 \times \frac{5!}{2!3!} = 24 \times \frac{5 \times 4}{2} = 240$$

Số cách chọn 1 bi đỏ, 1 bi trắng, 2 bi vàng :

$$4 \times 5 \times C_6^2 = 20 \times \frac{6!}{2!4!} = 10 \times 6 \times 5 = 300$$

Vậy số cách chọn bi đủ 3 màu là :

$$180 + 240 + 300 = 720$$

Do đó số cách chọn bi không đủ 3 màu :

$$1365 - 720 = 645. \blacksquare$$

Bài 101.

a) Cho k, n $\in$ N và k < n. Chứng minh : $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

b) Một đa giác lồi n cạnh có mấy đường chéo.

Đại học Quốc gia TP. HCM khối D 1998

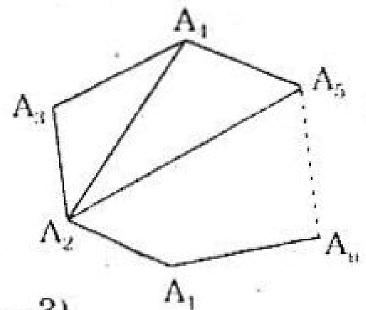
Giải

a) Ta có : $C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$

$$= \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n![(k+1)+(n-k)]}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = C_{n+1}^{k+1}.$$

b) Nối 2 đỉnh bất kì trong n đỉnh ta được cạnh hoặc đường chéo.



Vậy tổng số cạnh và đường chéo là C_n^2.

Mà n giác lồi có n cạnh nên số đường chéo là :

$$C_n^2 - n = \frac{n!}{2!(n-2)!} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}. \blacksquare$$

Bài 102*. Cho đa giác đều H có 20 cạnh. Xét các tam giác có 3 đỉnh lấy từ 3 đỉnh của H.

a) Có bao nhiêu tam giác như vậy ? Có bao nhiêu có đúng 2 cạnh là 2 cạnh của H.

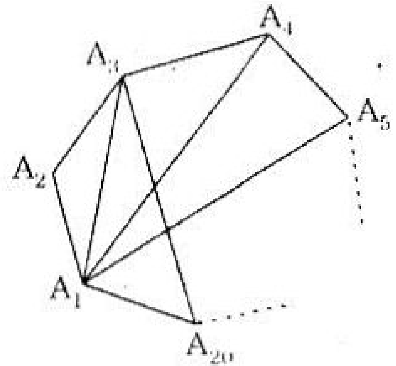
b) Có mấy tam giác có đúng 1 cạnh là cạnh của H ? Có mấy tam giác không có cạnh nào là cạnh của H ?

Học viện Ngân hàng TP. HCM 2000

Giải

a) • Số tam giác có 3 đỉnh lấy từ 3 đỉnh của H :

$$C_{20}^{3} = \frac{20!}{3!17!} = \frac{20 \times 19 \times 18}{6} = 1140.$$



• Cứ mỗi đỉnh của H cùng với 2 đỉnh kề bên tạo thành 1 tam giác có 2 cạnh là cạnh của H. Các tam giác này không trùng nhau và không có cách nào khác để tạo tam giác có 2 cạnh là cạnh của H.

Mà H có 20 đỉnh. Vậy có 20 tam giác có đúng 2 cạnh là cạnh của H.

b) • Xét các tam giác mà 1 đỉnh là A_1. Để có đúng 1 cạnh của tam giác là cạnh của H ta bỏ đi 4 cạnh A_1A_2, A_2A_3, A_1A_{20}, $A_{20}A_{19}$. Vậy có 16 tam giác mà đỉnh là A_1 và có đúng 1 cạnh là cạnh của H.

Mà H có 20 đỉnh, vậy số tam giác có đúng 1 cạnh là cạnh của H là :

$$20 \times 16 = 320.$$

• Do đó số tam giác không có cạnh nào là cạnh của H là :

$$1.140 - (20 + 320) = 800. \quad \blacksquare$$

Bài 103*. Trên mặt phẳng cho 1 thập giác lồi. Xét các tam giác mà 3 đỉnh của nó là 3 đỉnh của thập giác. Hỏi trong số các tam giác đó có bao nhiêu tam giác mà 3 cạnh của nó đều không phải là 3 cạnh của thập giác.

Đại học Ngoại thương khối A 2001

Giải

Số tam giác mà 3 đỉnh là 3 đỉnh của thập giác : $C_{10}^{3} = 120$.

Số tam giác mà 3 đỉnh là 3 đỉnh của thập giác và có 2 cạnh là cạnh thập giác (có các đỉnh phải là 3 đỉnh liên tiếp của thập giác) : 10.

Số tam giác mà 3 đỉnh là 3 đỉnh của thập giác và có 1 cạnh là cạnh thập giác (có được bằng cách nối 1 đỉnh bất kì của thập giác với 2 đỉnh của 1 cạnh thập giác trừ đi 4 cạnh kề bên hai đỉnh đó) : $10 \times 6 = 60$.

Do đó số tam giác mà 3 cạnh đều không phải là 3 cạnh của thập giác : $120 - (10 + 60) = 50$. ■

Bài 104*. Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ ($n \in N$ và $n \geq 2$) nội tiếp trong đường tròn (O). Biết rằng số tam giác có đỉnh là 3 trong 2n đỉnh A_1, A_2, ..., A_{2n} nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n đỉnh A_1, A_2, A_{2n}. Tìm n.

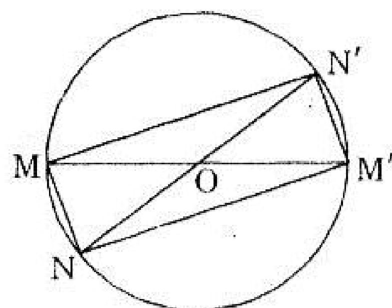
Tuyển sinh Đại học khối B 2002

Giải

- Số tam giác tạo thành :

$$C_{2n}^3 = \frac{(2n)!}{3!(2n-3)!} = \frac{1}{6}(2n)(2n-1)(2n-2).$$

- Vì đa giác đều và số đỉnh chẵn nên số cặp điểm đối xứng qua tâm O là n



Chọn 2 đỉnh bất kì M, M' đối xứng qua O có n cách.

Chọn 1 đỉnh N bất kì trong các đỉnh còn lại có 2n – 2 cách.

Luôn luôn tìm được N' đối xứng qua tâm O để MNM'N' là hình chữ nhật.

Nhưng do mỗi hình chữ nhật MNM'N' như vậy bị đếm trùng lại 4 lần nên số hình chữ nhật tạo thành là :

$$\frac{n(2n-2)}{4} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Do số tam giác nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật, nên :

$$\frac{n}{3}(2n-1)(2n-2) = \frac{n(n-1)}{2} \times 20$$

$$\Leftrightarrow \quad (2n-1)(2n-2) = 30(n-1) \quad (\text{do } n \geq 2)$$

$$\Leftrightarrow \quad (2n-1) = 15 \quad \Leftrightarrow \quad n = 8. \quad \blacksquare$$

Bài 105. Trong 1 trường tiểu học có 50 học sinh đạt danh hiệu cháu ngoan Bác Hồ trong đó có 4 cặp anh em sinh đôi. Cần chọn 1 nhóm gồm 3 trong số 50 học sinh trên đi dự đại hội cháu ngoan Bác Hồ, sao cho trong nhóm không có cặp anh em sinh đôi nào. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

Đại học Sư phạm Hà Nội 1999

Giải

Số cách chọn 3 học sinh bất kì : $C_{50}^3 = 19600$

Số cách chọn 3 học sinh trong đó có 1 cặp sinh đôi

$$4.C_{48}^1 = 4 \times 48 = 192$$

Do đó số cách chọn 3 học sinh mà không có cặp nào sinh đôi

$$C_{50}^3 - 4C_{48}^1 = 19600 - 192 = 19408. \blacksquare$$

Bài 106. Lớp học có 4 nữ, 10 nam. Cần chia làm hai tổ, mỗi tổ có 2 nữ, 5 nam. Hỏi có mấy cách ?

Giải

Chọn 2 trong 4 nữ, có C_4^2 cách.

Tiếp đến, chọn 5 trong 10 nam, có C_{10}^5 cách.

Các học sinh được chọn vào một tổ, các học sinh còn lại vào tổ kia.

Vậy, có :

$$C_4^2.C_{10}^5 = \frac{4!}{2!2!}\cdot\frac{10!}{5!5!} = 3.2.\frac{10.9.8.7.6}{2.3.4.5} = 3.2.3.2.7.6 = 1512 \text{ cách.} \blacksquare$$

Bài 107. A, B, C đến nhà D mượn sách. D có 1 cuốn tiểu thuyết và 8 cuốn giáo khoa khác nhau. A mượn 2 cuốn trong đó có 1 cuốn tiểu thuyết. B mượn 2 cuốn giáo khoa và C mượn 3 cuốn giáo khoa. Hỏi có mấy cách khác nhau để D cho mượn sách ?

Giải

Ngoài cuốn tiểu thuyết, A chọn thêm 1 trong 8 cuốn giáo khoa, có C_8^1 cách.

B chọn 2 trong 7 cuốn còn lại, có C_7^2 cách.

C chọn 3 trong 5 cuốn còn lại, có C_5^3 cách.

Vậy có : $C_8^1.C_7^2.C_5^3 = 1680$ cách. ■

Bài 108. Có một tờ bạc 5000đ, 1 tờ bạc 10000đ, 1 tờ bạc 20000đ và 1 tờ bạc 50000đ. Từ các tờ bạc này, có thể tạo ra bao nhiêu tổng số tiền khác nhau ?

Giải

Dùng 1 trong 4 tờ bạc thì số tổng số tiền khác nhau là C_4^1.

Dùng 2 trong 4 tờ bạc thì số tổng số tiền khác nhau là C_4^2.

Dùng 3 trong 4 tờ bạc thì số tổng số tiền khác nhau là C_4^3.

Dùng 4 trong 4 tờ bạc thì số tổng số tiền khác nhau là C_4^4.

Vậy, số tổng số tiền khác nhau là :

$C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = (C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4) - C_4^0 = 2^4 - 1 = 15.$ ■

Bài 109. Một tập thể có 14 người gồm 6 nam và 8 nữ trong đó có An và Bình. Người ta muốn chọn 1 tổ công tác gồm 6 người. Tìm số cách chọn trong mỗi trường hợp sau :

a) Trong tổ phải có mặt cả nam lẫn nữ.

b*) Trong tổ phải có 1 tổ trưởng, 5 tổ viên, hơn nữa An và Bình không đồng thời có mặt trong tổ.

Đại học Kinh tế TP. HCM 2001

Giải

Số cách chọn 6 người bất kì : $C_{14}^6 = \dfrac{14!}{6!8!} = 3003$

Số cách chọn 6 người toàn nam : $C_6^6 = 1$

Số cách chọn 6 người toàn nữ : $C_8^6 = \dfrac{8!}{6!2!} = 28$

Do đó số cách chọn tổ công tác để có nam lẫn nữ

$$3003 - (1 + 28) = 2974.$$

b) ***Cách 1 :***

Số cách chọn An làm tổ trưởng và không có Bình :

$1.C_{12}^5 = 792$

Số cách chọn An làm tổ viên và không có Bình :

$12.C_{11}^4 = 12.\dfrac{11!}{4!7!} = 3960$

Vậy số cách chọn có An mà không có Bình :

$$C_{12}^5 + 12C_{11}^4 = 4752$$

Tương tự số cách chọn có Bình mà không có An cũng là :

$$C_{12}^5 + 12C_{11}^4 = 4752$$

Số cách chọn không có An lẫn Bình :

$$12C_{11}^5 = 12.\frac{11!}{5!6!} = 5544$$

Do đó yêu cầu bài toán :

$$2(C_{12}^5 + 12C_{11}^4) + 12C_{11}^5 = 2(4752) + 5544 = 15048.$$

Cách 2 :

Chọn tùy ý 6 trong 14 học sinh có : C_{14}^6 cách.

Chọn An và Bình rồi chọn thêm 4 học sinh trong 12 học sinh còn lại có : C_{12}^4 cách.

Vậy số cách chọn 6 học sinh trong đó An và Bình không đồng thời có mặt : $C_{14}^6 - C_{12}^4$

Với 6 học sinh đã chọn xong có 6 cách chọn ra tổ trưởng.

Vậy số cách chọn thỏa yêu cầu của đề toán là :

$$6(C_{14}^6 - C_{12}^4) = 15048 \text{ cách.} \blacksquare$$

Bài 110. Số 210 có bao nhiêu ước số.

Giải

Ta phân tích 210 ra thừa số nguyên tố : 210 = 2.3.5.7

Vậy, 210 có 4 thừa số nguyên tố là 2, 3, 5, 7.

Số ước số là một thừa số nguyên tố có $C_4^1 = 4$ số (gồm 2, 3, 5, 7).

Số ước số là tích của hai thừa số nguyên tố có $C_4^2 = 6$ số (gồm 2.3, 2.5, 2.7, 3.5, 3.7, 5.7).

Số ước số là tích của ba thừa số nguyên tố có $C_4^3 = 4$ số (gồm 2.3.5, 2.3.7, 2.5.7, 3.5.7).

Số ước số là tích của bốn thừa số nguyên tố có $C_4^4 = 1$ số (là 2.3.5.7).

Ngoài ra, số ước số không chứa thừa số nguyên tố nào có $C_4^0 = 1$ số (là 1).

Tóm lại, có : $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^4 = 16$ số. ■

CÁC BÀI TOÁN HỖN HỢP

Bài 111. Một cuộc khiêu vũ có 10 nam, 6 nữ. Cần chọn 3 nam, 3 nữ lập thành 3 cặp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

Giải

Chọn 3 trong 10 nam, có C_{10}^3 cách.

Chọn 3 trong 6 nữ, có C_6^3 cách.

Cuối cùng, ghép 3 nam với 3 nữ là hoán vị của 3 phần tử, có 3! cách.

Vậy, có : $C_{10}^3 . C_6^3 . 3! = \frac{10!}{3!7!} \cdot \frac{6!}{3!3!} . 3! = 5.3.8.6.5.4 = 14400$ cách. ■

Bài 112. Có 5 bưu thiếp khác nhau, 6 bì thư khác nhau. Cần chọn 3 bưu thiếp, bỏ vào 3 bì thư, mỗi bì một bưu thiếp và gửi cho 3 người bạn mỗi bạn một bưu thiếp. Hỏi có mấy cách ?

Giải

Chọn 3 trong 5 bưu thiếp, có C_5^3 cách.

Chọn 3 trong 6 bì thư, có C_6^3 cách.

Bỏ 3 bưu thiếp vào 3 bì thư là hoán vị của 3 phần tử, có 3! cách.

Gửi cho 3 người bạn là hoán vị của 3 phần tử, có 3! cách.

Vậy, có : $C_5^3 . C_6^3 . 3!3! = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{6!}{3!3!} . 3!3! = 10.6! = 7200$ cách. ■

Bài 113*. Có 4 người Việt, 4 người Nhật, 4 người Trung Quốc và 4 người Triều Tiên. Cần chọn 6 người đi dự hội nghị. Hỏi có mấy cách chọn sao cho :

a) Mỗi nước đều có đại biểu ?

b) Không có nước nào có hơn hai đại biểu ?

Giải

a) * *Trường hợp 1* :

Một nước có 3 đại biểu và các nước kia mỗi nước có 1 đại biểu.

Trong 4 nước, chọn 1 nước được cử 3 đại biểu : có 4 cách. Trong 4 người của nước đó, chọn ra 3 người, có $C_4^3 = 4$ cách. Ba nước còn lại mỗi nước chọn 1 trong 4 người có 4^3 cách.

Vậy có : $4.C_4^3.4^3 = 4^5$ cách.

* *Trường hợp 2* :

Có hai nước mỗi nước có 2 đại biểu và hai nước kia mỗi nước có 1 đại biểu.

Trong 4 nước, chọn 2 nước để mỗi nước đó được chọn 2 đại biểu, có : $C_4^2 = 6$ cách. Chọn 2 trong 4 người của mỗi nước đó, có : $C_4^2 = 6$ cách. Suy ra hai nước đó có 6^2 cách chọn đại biểu. Hai nước còn lại, chọn 1 trong 4 người, có 4 cách. Suy ra hai nước còn lại có 4^2 cách chọn đại biểu.

Vậy có : $6^3 4^2$ cách.

Tóm lại, số cách chọn thỏa yêu cầu đề bài là :

$$4^5 + 6^3.4^2 = 4480 \text{ cách.}$$

b) * *Trường hợp 1* : Có 3 nước mỗi nước hai đại biểu.

Chọn 3 trong 4 nước để mỗi nước đó được chọn 2 đại biểu, có $C_4^3 = 4$ cách. Chọn 2 trong 4 người của mỗi nước đó, có : $C_4^2 = 6$ cách. Ba nước đó có 6^3 cách.

Vậy có : 4.6^3 cách.

* *Trường hợp 2* : Có 2 nước mỗi nước 2 đại biểu và 2 nước còn lại mỗi nước 1 đại biểu.

Trường hợp 2 của câu a ta đã có $6^3.4^2$ cách.

Tóm lại, số cách chọn thỏa yêu cầu đề bài là :

$$4.6^3 + 6^3.4^2 = 4320 \text{ cách.} \blacksquare$$

Bài 114.

a) Có 10 cái bánh khác nhau và 5 cái hộp khác nhau. Hỏi có mấy cách xếp mỗi hộp hai bánh ?

b) Nếu 10 bánh khác nhau và 5 hộp giống nhau thì có mấy cách ?

Giải

a) Chọn 2 trong 10 bánh, cho vào hộp thứ nhất, có : C_{10}^2 cách.

Chọn 2 trong 8 bánh còn lại, cho vào hộp thứ hai, có : C_8^2 cách.

Tiếp tục quá trình chọn như trên, ta có :

$$C_{10}^2.C_8^2.C_6^2.C_4^2.C_2^2 = \frac{10!}{2!8!}\cdot\frac{8!}{2!6!}\cdot\frac{6!}{2!4!}\cdot\frac{4!}{2!2!}.1$$

$$= 45.28.15.6 = 113400 \text{ cách.}$$

b) Với mỗi cách chọn lần lượt từng 2 bánh rồi xếp vào 5 hộp khác nhau, đổi chỗ 5 hộp (trước khi xếp bánh vào), ta được 5! cách.

Với mỗi cách chọn lần lượt từng 2 bánh rồi xếp vào 5 hộp giống nhau, đổi chỗ 5 hộp (trước khi xếp bánh vào), ta chỉ được 1 cách.

Vậy số cách xếp theo yêu cầu là : $\frac{113.400}{5!} = 945$ cách. ■

Bài 115. Một thầy giáo có 12 cuốn sách đôi một khác nhau trong đó có 5 sách Văn, 4 sách Anh văn và 3 sách Hóa. Ông lấy ra 6 cuốn và tặng 6 học sinh A, B, C, D, E, F mỗi em 1 cuốn.

a) Giả sử thầy giáo chỉ muốn tặng các học sinh trên những cuốn sách thuộc lại Anh văn và Văn. Hỏi có bao nhiêu cách tặng.

b*) Giả sử thầy giáo muốn rằng, sau khi tặng xong mỗi loại Văn, Anh văn, Hóa còn ít nhất 1 cuốn. Hỏi có bao nhiêu cách tặng.

Đại học Quốc gia TP. HCM 2000

Giải

a) Số cách lấy ra 6 cuốn sách loại Văn và Anh văn : C_9^6.

Số cách đưa 6 sách này cho 6 học sinh : 6!

Vậy số cách tặng các sách chỉ loại Văn và Anh văn :

$$C_9^6.6! = \frac{9!}{3!} = 60\,480.$$

b) Số cách tặng 6 sách bất kì : $6!C_{12}^6 = 6! \times 924$.

Số cách tặng không còn sách Văn : $6!C_7^1 = 6! \times 7$

Số cách tặng không còn sách Anh văn : $6!C_8^2 = 6! \times 28$

Số cách tặng không còn sách Hóa : $6!C_9^3 = 6! \times 84$

Vậy số cách tặng thỏa mãn yêu cầu bài toán là :

$$6!(C_{12}^6 - C_7^1 - C_8^2 - C_9^3) = 720 \times 805 = 579600.$$ ■

Bài 116. Cho A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.

a) Có bao nhiêu tập con của A chứa 1 mà không chứa 2.

b) Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số khác nhau mà không bắt đầu bởi 123.

Đại học Quốc gia TP. HCM 1999

Giải

a) Nếu tập X có n phần tử thì số tập con của X là : 2^n.

Tập A\{1, 2} có 6 phần tử, vậy ta có : $2^6 = 64$ tập con, mỗi tập con này đều không chứa 1 và 2.

Ta hội 64 tập con này với {1} thì ta được 64 tập con của A chứa 1 mà không chứa 2.

b) Gọi $n = \overline{a_1a_2...a_5}$ chẵn.

Do $a_5 \in \{2, 4, 6, 8\}$ có 4 cách chọn.

Số cách chọn a_1, a_2, a_3, a_4 là : $A_7^4 = \frac{7!}{3!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$.

Vậy số các số n chẵn là : $4A_7^4 = 3360$.

Xét $m = \overline{123a_4a_5}$ mà m chẵn.

Do $a_5 \in \{4, 6, 8\}$ có 3 cách chọn.

$a_4 \in \{4, 5, 6, 7, 8\} \backslash \{a_5\}$ có 4 cách chọn.

Vậy số các số m là : 12.

Do đó số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán : $3360 - 12 = 3348$. ■

Bài 117. Có thể lập được bao nhiêu số có 8 chữ số trong các số 1, 2, 3, 4, 5, 6 trong đó 1 và 6 đều có mặt đúng 2 lần còn các chữ số khác xuất hiện 1 lần.

Đại học Sư phạm Hà Nội 2000

Giải

Gọi số cần tìm là $n = \overline{a_1a_2...a_8}$

Xét hộc có 8 ô trống.

Chọn 2 chữ số 1 bỏ vào hộc có C_8^2 cách.

Chọn tiếp theo 2 chữ số 6 bỏ vào hộc có C_6^2 cách.

Còn lại 4 chữ số 2, 3, 4, 5 bỏ vào 4 hộc trống còn lại có : 4! cách.

Vậy số cách thỏa yêu cầu bài toán là

$$C_8^2.C_6^2.4! = \frac{8!}{2!6!} \times \frac{6!}{2!4!} \times 4! = \frac{8!}{2!2!} = 10\,080 \text{ cách.}$$

Chú ý : Bài toán hoán vị lặp, tổ hợp lặp, chỉnh hợp lặp không có trong chương trình phổ thông. ■

Bài 118.

a) Có bao nhiêu số chẵn gồm 6 chữ số khác nhau đôi một trong đó chữ số đầu tiên là chữ số lẻ.

b) Có bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau đôi một trong đó có đúng 3 chữ số lẻ và 3 chữ số chẵn.

Đại học Quốc gia TP. HCM 2000

Giải

a) Đặt $n = \overline{a_1a_2...a_6}$ $(a_1 \neq 0)$

Chọn $a_1 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ có 5 cách.

$a_6 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ có 5 cách.

Bốn chữ số còn lại a_2, a_3, a_4, a_5 được chọn từ :

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \setminus \{a_1, a_6\}$ có $A_8^4 = \dfrac{8!}{4!} = 1680$ cách.

Vậy số cách chọn thỏa yêu cầu câu a là : $25 \times 1680 = 42000$ số.

b) Đặt $m = \overline{a_1a_2...a_6}$

Trường hợp 1 : a_1 có thể bằng 0.

Số cách chọn 3 chữ số chẵn bất kì : C_5^3 cách.

Số cách chọn 3 chữ số lẻ bất kì : C_5^3 cách.

Chọn các a_i $(i = \overline{1,6})$ từ 6 số trên có 6! cách.

Vậy có : $6!C_5^3.C_5^3 = 72\,000$ số.

Trường hợp 2 : xét $m' = \overline{0a_1a_2...a_6}$

Chọn 2 chữ số chẵn bất kì có : C_4^2 cách.

Chọn 3 chữ số lẻ bất kì có : C_5^3 cách.

Hoán vị 5 chữ số trên có 5! cách.

Vậy có : $5!C_4^2.C_5^3 = 7200$ số.

Do đó số các số thỏa yêu cầu của câu b là :

$$72000 - 7200 = 64800. \quad \blacksquare$$

Bài 119. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số biết rằng chữ số 2 có mặt đúng 2 lần, chữ số 3 có mặt đúng 3 lần còn các chữ số khác có mặt không quá 1 lần.

Đại học Quốc gia TP. HCM 2001

Giải

Gọi số cần tìm là $n = \overline{a_1a_2...a_7}$ $(a_1 \neq 0)$

Xét hộc có 7 ô trống.

- Trường hợp a_1 tùy ý (a_1 có thể bằng 0).

Số cách đem 2 chữ số 2 bỏ vào hộc là : $C_7^2 = \dfrac{7!}{2!5!} = 21$.

Số cách đem 3 chữ số 3 bỏ vào hộc là : $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!2!} = 10$.

Còn lại 8 chữ số và còn 2 ô trống vậy số cách đưa các chữ số này vào hộc là : $A_8^2 = \dfrac{8!}{6!} = 56$

Vậy có : $21 \times 10 \times 56 = 11760$ số.

- Trường hợp $a_1 = 0$.

Số cách đem 2 chữ số 2 bỏ vào hộc là : $C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = 15$.

Số cách đem 3 chữ số 3 bỏ vào hộc là : $C_4^3 = \frac{4!}{3!} = 4$.

Còn lại 7 chữ số và 1 ô trống vậy có 7 cách đem 1 chữ số còn lại bỏ vào hộc.

Do đó số các số $n = \overline{0a_2a_3...a_7}$ là $15 \times 4 \times 7 = 420$.

- Vậy số các số thỏa yêu cầu bài toán :

$$11760 - 420 = 11340. \blacksquare$$

CÁC SAI SÓT THƯỜNG GẶP KHI GIẢI TOÁN ĐẠI SỐ TỔ HỢP

1. *Không hiểu đúng các từ dùng trong đề bài*

Ví dụ : Trong đề thi tuyển sinh vào Đại học Kinh tế TPHCM năm 2001 có câu "An và Bình không đồng thời có mặt" nghĩa là loại bỏ trường hợp có An và có Bình, ta còn lại ba trường hợp : có An không có Bình, có Bình không có An, không có An không có Bình. Nếu đọc không kỹ, câu văn nêu trên dễ hiểu nhầm thành "không có An không có Bình" tức là "An và Bình đồng thời không có mặt".

2. *Có những trường hợp trùng lặp, bị đếm hai lần mà không biết*

Ví dụ : Một lớp học có 20 học sinh gồm 14 nam, 6 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách thành lập một đội gồm 4 học sinh trong đó có ít nhất 1 nữ ?

Giải : Chọn 1 nữ trong 6 nữ, có $C_6^1 = 6$ cách.

Chọn thêm 3 học sinh trong 19 học sinh còn lại, có C_{19}^3 cách.

Vậy có : $C_6^1.C_{19}^3 = C_{19}^3$ cách.

Cách giải này sai ở chỗ giữa hai lần chọn "1 nữ rồi 3 học sinh còn lại" có thể bị trùng lặp, bị đếm hai lần. Ví dụ : "chọn nữ A rồi 3 học sinh B, C, D" và "chọn nữ B rồi 3 học sinh A, C, D".

3. *Có những trường hợp không liệt kê đủ, đếm thiếu mà không biết*

Ví dụ : Năm nam sinh và ba nữ sinh xếp vào 8 chỗ ngồi. Có bao nhiêu cách xếp sao cho không có hai nữ sinh ngồi cạnh nhau ?

Giải : Ta đánh số các chỗ ngồi từ 1 đến 8. Các trường hợp có hai nữ ngồi cạnh nhau ở các ghế số : 123, 234, 345, 456, 567, 678 : có 6 trường hợp.

Chọn 3 ghế tùy ý cho 3 nữ là tổ hợp chập 3 của 8 phần tử, có C_8^3 cách.

Trừ các trường hợp nêu trên còn : $C_8^3 - 6$ cách.

Xếp 3 nữ vào các ghế đã chọn, có : 3! cách.

Xếp 5 nam vào các ghế còn lại, có : 5! cách.

Vậy có : $5!3!(C_8^3 - 6)$ cách.

Cách giải này sai ở chỗ đếm thiếu các trường hợp có hai nữ ngồi kế nhau khi 3 nữ ở các ghế số 123, 124, 125, 126, 127, 128, 234, 235, 236, 237, 238, 345, 346, 347, 348, 456, 457, 458, 567, 568, 678 : có 21 trường hợp.

4. *Không thấy rõ chỉnh hợp là "tổ hợp rồi hoán vị"*

Ví dụ : Một cuộc khiêu vũ có 10 nam và 6 nữ, chọn có thứ tự 3 nam và 3 nữ để ghép thành 3 cặp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

Giải : Chọn có thứ tự 3 nam trong 10 nam, có A_{10}^3 cách.

Chọn có thự tự 3 nữ trong 6 nữ, có A_6^3 cách.

Vậy có : $A_{10}^3.A_6^3$ cách.

Cách giải trên sai ở chỗ không thấy được việc ghép thành cặp là một hoán vị và hàm ý "có thứ tự" trong việc chọn đã bị tính đến hai lần mà thực ra chỉ có một lần khi ghép cặp.

5. *Xét phần bù sai*

Với các bài toán tìm số cách chọn "thỏa tính chất p" mà số cách chọn "không thỏa tính chất p" ít trường hợp hơn, ta thường làm như sau :

Số cách chọn thỏa p = số cách chọn tùy ý – số cách chọn không thỏa p

Khi làm cách này, sai sót dễ mắc phải là phát biểu mệnh đề "không thỏa tính chất p" thiếu chính xác.

Ví dụ : Một thầy giáo có 12 cuốn sách đôi một khác nhau, trong đó có 5 cuốn văn, 4 cuốn nhạc, 3 cuốn họa. Thầy muốn chọn ra 6 cuốn tặng cho 6 học sinh sao cho tặng xong mỗi thể loại đều còn ít nhất 1 cuốn. Hỏi có mấy cách ?

Trong ví dụ này, tính chất p là "mỗi thể loại đều còn" và không thỏa tính chất p là "có ít nhất một thể loại không còn". (Ta dễ hiểu sai thành "mỗi thể loại đều không còn").

BÀI TẬP

1 Tìm x sao cho :

$$C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 = \frac{7}{2}x$$

Cao đẳng Hải quan 1998

2 Tính : $C_{11}^6 + C_{11}^7 + C_{11}^8 + C_{11}^9 + C_{11}^{10} + C_{11}^{11}$

Đại học Quốc gia Hà Nội 1997

3 Tìm x, y sao cho :

$$C_{x+1}^y : C_x^{y+1} : C_x^{y-1} = 6 : 5 : 2.$$

4 Giải các bất phương trình :

a) $C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 - \frac{5}{2}A_{n-2}^2 < 0$

b) $\frac{A_{n+1}^4}{C_{n-1}^{n-3}} < 14P_3.$

5 Tìm k sao cho :

$C_j^k, C_j^{k+1}, C_j^{k+2}$ theo thứ tự tạo 1 cấp số cộng.

6 Đạo diễn An có 11 người bạn mà chỉ có 5 vé mời xem buổi ra mắt phim của mình. Trong 11 bạn có 1 cặp vợ chồng nên chỉ có thể hoặc trao 2 vé mời, hoặc không trao vé nào. Hỏi ông An có bao nhiêu cách trao 5 vé mời.

7 Ba bạn An, Bình, Chi cùng đến nhà bạn Danh mượn sách. Bạn Danh có 8 quyển sách khác nhau trong đó chỉ có 2 quyển truyện hình sự.

Bạn An muốn mượn 2 quyển trong đó phải có quyển truyện hình sự. Bạn Bình muốn mượn 2 quyển, bạn Chi muốn mượn 3 quyển. Hỏi bạn Danh có bao nhiêu cách cho mượn.

8 Có 10 cuốn tập giống nhau muốn phát cho 6 em. Hỏi có bao nhiêu cách phát sao cho mỗi em có ít nhất 1 cuốn tập, nhiều nhất chỉ 2 cuốn.

9 Có 4 câu hỏi lý thuyết và 6 bài tập áp dụng. Thầy giáo muốn tạo ra 1 đề kiểm tra gồm 3 câu trong đó phải có ít nhất 1 câu lý thuyết và 1 bài tập. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

10 Một người có 6 bông hồng vàng và 4 bông hồng đỏ. Người đó muốn lấy ra 3 bông hồng để tặng bạn. Có bao nhiêu cách lấy :

a) đúng 2 bông hồng vàng và 1 bông hồng đỏ.

b) nhiều nhất 2 bông hồng vàng.

c) ít nhất 2 bông hồng vàng.

11 Một đội văn nghệ có 20 người gồm 10 nam và 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 người sao cho :

a) có đúng 2 nam.

b) có ít nhất 2 nam và ít nhất 1 nữ.

Đại học Thái Nguyên 2000

12 Có 1 hộp đựng 2 bi đỏ, 3 bi trắng, 5 bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để 4 bi đó không đủ 3 màu.

Đại học Văn Hiến 2000

13 Cho 7 điểm trên mặt phẳng sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Có bao nhiêu

a) Đường thẳng qua 2 trong 7 điểm trên.

b) Tam giác được tạo thành từ 7 điểm trên.

14 Có 2 nhà Toán học và 10 nhà Vật lý. Muốn lập một tổ công tác gồm 8 người mà phải có ít nhất 1 nhà Toán học. Hỏi có bao nhiêu cách.

15 Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số gồm 10 chữ số được chọn từ 8 chữ số trên trong đó chữ số 6 có mặt đúng

3 lần, các chữ số khác có mặt đúng 1 lần.

Đại học Nông nghiệp 1 khối B 2001

16 Cho E = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

a) Có bao nhiêu tập con của E có chứa chữ số 9.

b) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau từ E mà chia hết cho 5.

Đại học Nông nghiệp 2000

17 Tìm tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số sao cho trong mỗi số chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng trước.

Đại học Sư phạm Vinh khối D 2000

18 Trong 1 cuộc đua có 12 con ngựa cùng xuất phát. Hỏi có bao nhiêu khả năng :

a) Ba con ngựa về nhất, nhì, ba.

b) Ba con ngựa về đích đầu tiên.

19 Có bao nhiêu cách xếp 8 quả bóng bàn giống nhau vào :

a) 2 hộp giống nhau.

b) 2 hộp khác nhau.

20 Số 2310 có bao nhiêu ước số.

Chương V

NHỊ THỨC NEWTON

Nhị thức Newton có dạng :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^n a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Các hệ số C_n^k của các lũy thừa $(a + b)^n$ với n lần lượt là 0, 1, 2, 3, ... được sắp thành từng hàng của tam giác sau đây, gọi là tam giác Pascal :

$(a+b)^0 = 1$	1
$(a+b)^1 = a + b$	1 1
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	1 (4)+(6) 4 1
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$	1 5 (10) 10 5 1

Các tính chất của tam giác Pascal :

(i) $C_n^0 = C_n^n = 1$: các số hạng đầu và cuối mỗi hàng đều là 1.

(ii) $C_n^k = C_n^{n-k}$ $(0 \le k \le n)$: các số hạng cách đều số hạng đầu và cuối bằng nhau.

(iii) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ $(0 \le k \le n-1)$: tổng 2 số hạng liên tiếp ở hàng trên bằng số hạng giữa 2 số hạng đó ở hàng dưới.

(iv) $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$: tổng các số hạng trong hàng ứng với $(a+b)^n$ là 2^n.

Các tính chất của nhị thức Newton :

(i) Số các số hạng trong khai triển nhị thức $(a + b)^n$ là n + 1.

(ii) Tổng số mũ của a và b trong từng số hạng của khai triển nhị thức $(a + b)^n$ là n.

(iii) Số hạng thứ k + 1 là $C_n^k a^{n-k} b^k$.

Dạng 1.

TRỰC TIẾP KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NEWTON

1. Khai triển $(ax + b)^n$ với a, b = ± 1, ± 2, ± 3 ...

Cho x giá trị thích hợp ta chứng minh được đẳng thức về $C_n^0, C_n^1, ..., C_n^n$.

Hai kết quả thường dùng

$$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^nx^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^kx^k \quad (1)$$

$$(1 - x)^n = C_n^0 - C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + (-1)^nC_n^nx^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^kC_n^kx^k \quad (2)$$

- ***Ví dụ :*** Chứng minh a) $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$

  b) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + ... + (-1)^nC_n^n = 0$

Giải

a) Viết lại đẳng thức (1) chọn x = 1 ta được điều phải chứng minh.

b) Viết lại đẳng thức (2) chọn x = 1 ta được điều phải chứng minh.

2. Tìm số hạng đứng trước x^i (i đã cho) trong khai triển nhị thức Newton của một biểu thức cho sẵn

- ***Ví dụ :*** Tính số hạng thứ 13 trong khai triển $(3 - x)^{15}$.

Giải

Ta có :

$$(3 - x)^{15} = C_{15}^0 3^{15} - C_{15}^1 3^{14}x + ... + C_{15}^k 3^{15-k}.(-x)^k + ... + -C_{15}^{15}x^{15}$$

Do k = 0 ứng với số hạng thứ nhất nên k = 12 ứng với số hạng thứ 13

Vậy số hạng thứ 13 của khai triển trên là :

$$C_{15}^{12}3^3(-x)^{12} = 27x^{12}.\frac{15!}{12!3!} = 12.285x^{12}.$$

3. Đối với bài toán tìm số hạng độc lập với x trong khai triển nhị thức $(a + b)^n$ (a, b chứa x), ta làm như sau :

– Số hạng tổng quát trong khai triển nhị thức là :

$$C_n^ka^{n-k}b^k = Kx^m.$$

- Số hạng độc lập với x có tính chất : m = 0 và $0 \le k \le n$, $k \in N$. Giải phương trình này ta được $k = k_0$. Suy ra, số hạng độc lập với x là $C_n^{k_0} a^{n-k_0} b^{k_0}$.

- ***Ví dụ :*** Tìm số hạng độc lập với x trong khai triển nhị thức $\left(\frac{x}{2} + \frac{4}{x}\right)^{18}$.

Giải

Số hạng tổng quát trong khai triển nhị thức là :

$$C_{18}^k \left(\frac{x}{2}\right)^{18-k} \cdot \left(\frac{4}{x}\right)^k = C_{18}^k 2^{k-18} . 2^{2k} . x^{18-k} . x^{-k} = C_{18}^k 2^{3k-18} . x^{18-2k}$$

Số hạng độc lập với x trong khai triển nhị thức có tính chất :

$$18 - 2k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 9$$

Vậy, số hạng cần tìm là : $C_{18}^9 . 2^9$.

4. **Đối với bài toán tìm số hạng hữu tỉ trong khai triển nhị thức $(a + b)^n$ với a, b chứa căn**, ta làm như sau :

- Số hạng tổng quát trong khai triển nhị thức là :

$$C_n^k a^{n-k} b^k = Kc^{\frac{m}{p}} . d^{\frac{n}{q}} .$$

- Số hạng hữu tỷ có tính chất : $\frac{m}{p} \in N$ và $\frac{n}{q} \in N$ và $0 \le k \le n$, $k \in N$.

Giải hệ này, ta tìm được $k = k_0$. Suy ra số hạng cần tìm là :

$$C_n^{k_0} a^{n-k_0} b^{k_0} .$$

- ***Ví dụ :*** Tìm số hạng hữu tỷ trong khai triển nhị thức $\left(\sqrt[3]{16} + \sqrt{3}\right)^7$.

Giải

Số hạng tổng quát trong khai triển nhị thức là :

$$C_7^k \left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{7-k} . \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^k = C_7^k . 16^{\frac{7-k}{3}} . 3^{\frac{k}{2}} .$$

Số hạng hữu tỷ trong khai triển có tính chất :

$$\begin{cases} \frac{7-k}{3} \in N \\ \frac{k}{2} \in N \\ 0 \le k \le 7,\ k \in N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - k = 3m \\ k \text{ chẵn} \\ 0 \le k \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 7 - 3m \ (m \in Z) \\ k \text{ chẵn} \\ 0 \le k \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow k = 4$$

Vậy, số hạng cần tìm là : $C_{17}^4 . 16 . 3^2$.

Bài 120. Khai triển $(3x-1)^{16}$.

Suy ra $3^{16}C_{16}^0 - 3^{15}C_{16}^1 + 3^{14}C_{16}^2 + ... + C_{16}^{16} = 2^{16}$.

Đại học Bách khoa Hà Nội 1998

Giải

Ta có : $(3x-1)^{16} = \sum_{i=0}^{16}(3x)^{16-i}(-1)^i.C_{16}^i$

$= C_{16}^0(3x)^{16} - C_{16}^1(3x)^{15} + C_{16}^2(3x)^{14} + ... + C_{16}^{16}$.

Chọn x = 1 ta được :

$2^{16} = C_{16}^0 3^{16} - C_{16}^1 3^{15} + C_{16}^2 3^{14} + ... + C_{16}^{16}$. ■

Bài 121. Chứng minh :

a) $2^n C_n^0 + 2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-2}C_n^2 + ... + C_n^n = 3^n$

b) $3^n C_n^0 - 3^{n-1}C_n^1 + 3^{n-2}C_n^2 + ... + (-1)^n C_n^n = 2^n$.

Giải

a) Ta có : $(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + ... + C_n^n$.

Chọn x = 2 ta được :

$3^n = C_n^0 2^n + C_n^1 2^{n-1} + ... + C_n^n$.

b) Ta có : $(x-1)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + ... + (-1)^n C_n^n$.

Chọn x = 3 ta được :

$2^n = 3^n C_n^0 - 3^{n-1}C_n^1 + 3^{n-2}C_n^2 + ... + (-1)^n C_n^n$. ■

Bài 122. Chứng minh : $\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k = 2(2^{n-1}-1)$; $\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k = 0$.

Đại học Lâm nghiệp 2000

Giải

Ta có : $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$ (*)

Chọn x = 1 ta được

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n$$

$\Leftrightarrow \quad 2^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + 1$

$\Leftrightarrow \quad 2^n - 2 = \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k$

Trong biểu thức (*) chọn x = −1 ta được $0 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k$. ■

Bài 123. Chứng minh : $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + C_{2n}^4 3^4 + \ldots + C_{2n}^{2n} 3^{2n} = 2^{2n-1}(2^{2n} + 1)$

Đại học Hàng hải 2001

Giải

Ta có : $(1 + x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n}$ (1)

$(1 - x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \ldots - C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n}$ (2)

Lấy (1) + (2) ta được :

$$(1 + x)^{2n} + (1 - x)^{2n} = 2\left[C_{2n}^0 + C_{2n}^2 x^2 + \ldots + C_{2n}^{2n} x^{2n}\right]$$

Chọn x = 3 ta được :

$$4^{2n} + (-2)^{2n} = 2\left[C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + \ldots + C_{2n}^{2n} 3^{2n}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2^{4n} + 2^{2n}}{2} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + \ldots + C_{2n}^{2n} 3^{2n}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2^{2n}(2^{2n} + 1)}{2} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + \ldots + C_{2n}^{2n} 3^{2n}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^{2n-1}(2^{2n} + 1) = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + \ldots + C_{2n}^{2n} 3^{2n}.$$ ■

Bài 124. Tìm hệ số đứng trước x^5 trong khai triển biểu thức sau đây thành đa thức :

$$f(x) = (2x + 1)^4 + (2x + 1)^5 + (2x + 1)^6 + (2x + 1)^7.$$

Đại học Kiến trúc Hà Nội 1998

Giải

Ta có : $(2x + 1)^4 = \sum_{i=0}^{4} C_4^i (2x)^{4-i}$; $\quad (2x + 1)^5 = \sum_{i=0}^{5} C_5^i (2x)^{5-i}$

$(2x + 1)^6 = \sum_{i=0}^{6} C_6^i (2x)^{6-i}$; $\quad (2x + 1)^7 = \sum_{i=0}^{7} C_7^i (2x)^{7-i}$

Vậy số hạng chứa x^5 của $(2x + 1)^4$ là 0.

số hạng chứa x^5 của $(2x + 1)^5$ là $C_5^0(2x)^5$.

số hạng chứa x^5 của $(2x + 1)^6$ là $C_6^1(2x)^5$.

số hạng chứa x^5 của $(2x + 1)^7$ là $C_7^2(2x)^5$.

Do đó hệ số cần tìm là $= 0 + C_5^0 2^5 + C_6^1 2^5 + C_7^2 2^5$

$= (1 + C_6^1 + C_7^2)2^5 = 28 \times 32 = 896$. ■

Bài 125. Tìm số hạng chứa x^8 trong khai triển $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$ biết rằng

$$C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 7(n + 3).$$

Tuyển sinh Đại học khối A 2003

Giải

Ta có : $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 7(n + 3)$ (với $n \in N$)

$\Leftrightarrow \dfrac{(n+4)!}{3!(n+1)!} - \dfrac{(n+3)!}{3!n!} = 7(n+3)$

$\Leftrightarrow \dfrac{(n+4)(n+3)(n+2)}{6} - \dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} = 7(n+3)$

$\Leftrightarrow (n + 4)(n + 2) - (n + 2)(n + 1) = 42$

$\Leftrightarrow (n^2 + 6n + 8) - (n^2 + 3n + 2) = 42$

$\Leftrightarrow 3n = 36$

$\Leftrightarrow n = 12$.

Ta có : $\left(\dfrac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^{12} = \sum_{i=0}^{12} C_{12}^i (x^{-3})^{12-i}.(x^{\frac{5}{2}})^i = \sum_{i=0}^{12} C_{12}^i x^{-36+\frac{11}{2}i}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ $-36 + \dfrac{11}{2}i = 8$ (với $i \in N$ và $0 \le i \le 12$)

$\Leftrightarrow \dfrac{11i}{2} = 44 \Leftrightarrow i = 8$ (thỏa điều kiện).

Vậy số hạng chứa x^8 là

$$C_{12}^8 x^8 = \frac{12!x^8}{8!4!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2}x^8 = 495x^8.$$ ■

Bài 126. Biết rằng tổng các hệ số của khai triển $(x^2 + 1)^n$ bằng 1024. Hãy tìm hệ số a của số hạng ax^{12} trong khai triển đó.

Đại học Sư phạm Hà Nội 2000

Giải

Ta có : $(x^2 + 1)^n = C_n^0(x^2)^n + C_n^1(x^2)^{n-1} + ... + C_n^i(x^2)^{n-i} + ... + C_n^n$

Theo giả thiết bài toán, ta được

$$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^i + ... + C_n^n = 1024$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^n = 1024 = 2^{10} \quad \Leftrightarrow \quad n = 10$$

Để tìm hệ số a đứng trước x^{12} ta phải có

$$2(n - i) = 12 \quad \Leftrightarrow \quad 10 - i = 6 \quad \Leftrightarrow \quad i = 4$$

Vậy $\quad a = C_{10}^4 = \dfrac{10!}{4!6!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 210.$ ■

Bài 127. Tìm hệ số đứng trước x^4 trong khai triển $(1 + x + 3x^2)^{10}$.

Giải

Ta có :

$$(1 + x + 3x^2)^{10} = [1 + x(1 + 3x)]^{10}$$

$$= C_{10}^0 + C_{10}^1x(1 + 3x) + C_{10}^2x^2(1 + 3x)^2 + C_{10}^3x^3(1 + 3x)^3 +$$

$$+ C_{10}^4x^4(1 + 3x)^4 + ... + C_{10}^{10}(1 + 3x)^{10}$$

Hệ số đứng trước x^4 trong khai triển chỉ có trong $C_{10}^2x^2(1 + 3x)^2$, $C_{10}^3x^3(1 + 3x)^3$, $C_{10}^4x^4(1 + 3x)^4$ đó là :

$$C_{10}^2 9 + C_{10}^3 9 + C_{10}^4 = 9.\frac{10!}{8!2!} + 9\frac{10!}{3!7!} + \frac{10!}{6!4!}$$

$$= 405 + 1080 + 210 = 1695.$$ ■

Bài 128. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $[1 + x^2(1 - x)]^8$.

Tuyển sinh Đại học khối A 2004

Giải

Ta có :

$$[1 + x^2(1 - x)]^8 = C_8^0 + C_8^1x^2(1 - x) + C_8^2x^4(1 - x)^2 +$$

$$+ C_8^3x^6(1 - x)^3 + C_8^4x^8(1 - x)^4 + C_8^5x^{10}(1 - x)^5 + C_8^6x^{12}(1 - x)^6 +$$

$$+ C_8^7x^{14}(1 - x)^7 + C_8^8x^{16}(1 - x)^8$$

Số hạng chứa x^8 trong khai triển trên chỉ có trong $C_8^3x^6(1-x)^3$ và $C_8^4x^8(1-x)^4$ đó là $C_8^3x^6.3x^2$ và $C_8^4x^8$

Vậy hệ số của x^8 là : $3C_8^3 + C_8^4 = 238$. ■

Bài 129. Cho $\left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{-\frac{x}{3}}\right)^n = C_n^0\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^n + C_n^1\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1}\left(2^{-\frac{x}{3}}\right) + ...$

$$+ ... + C_n^{n-1}\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^{n-1} + C_n^n\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^n.$$

Biết rằng $C_n^3 = 5C_n^1$ và số hạng thứ tư bằng 20n. Tìm n và x.

Tuyển sinh Đại học khối A 2002

Giải

Ta có : $C_n^3 = 5C_n^1$ (điều kiện $n \in N$ và $n \geq 3$)

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{n!}{3!(n-3)!} = 5\dfrac{n!}{(n-1)!} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} = 5n$

$\Leftrightarrow \quad (n-1)(n-2) = 30 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 - 3n - 28 = 0$

$\Leftrightarrow \quad n = 7 \vee n = -4$ (loại do $n \geq 3$) $\quad \Leftrightarrow \quad n = 7$.

Ta có : $a_4 = 20n = 140$

$\Leftrightarrow \quad C_7^3\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^4.\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^3 = 140 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{7!}{3!4!}.2^{x-2} = 140$

$\Leftrightarrow \quad 2^{x-2} = 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$. ■

Bài 130. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{12}$.

Đại học Kinh tế Quốc dân 1997

Giải

Ta có :

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{12} = C_{12}^0x^{12} + C_{12}^1x^{11}\left(\frac{1}{x}\right) + ... + C_{12}^ix^{12-i}\left(\frac{1}{x}\right)^i + ... + C_{12}^{12}\frac{1}{x^{12}}$$

Để số hạng không chứa x ta phải có

$x^{12-i}\left(\dfrac{1}{x}\right)^i = x^0 \quad \Leftrightarrow \quad x^{12-2i} = x^0 \quad \Leftrightarrow \quad 12 - 2i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad i = 6$

Vậy số hạng cần tìm là : $C_{12}^6 = \dfrac{12!}{6!6!} = \dfrac{12\times11\times10\times9\times8\times7}{6\times5\times4\times3\times2} = 924$. ■

Bài 131. Tìm số hạng không chứa x (với x > 0) trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$

Tuyển sinh Đại học khối D 2004

Giải

Ta có : $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7 = \left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{4}}\right)^7$

$$= C_7^0(x^{\frac{1}{3}})^7 + C_7^1(x^{\frac{1}{3}})^6(x^{-\frac{1}{4}}) + \ldots + C_7^i(x^{\frac{1}{3}})^{7-i}(x^{-\frac{1}{4}})^i + \ldots + C_7^7(x^{-\frac{1}{4}})^7$$

Để tìm số hạng không chứa x ta phải có

$$\frac{1}{3}(7-i)-\frac{1}{4}i=0 \Leftrightarrow 4(7-i)-3i=0 \Leftrightarrow 28-7i=0$$

$$\Leftrightarrow i=4$$

Vậy số hạng không chứa x là : $C_7^4 = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7\times6\times5}{3\times2} = 35.$ ■

Bài 132. Trong khai triển $\left(x\sqrt[3]{x}+x^{-\frac{28}{15}}\right)^n$ hãy tìm số hạng không phụ thuộc x biết rằng $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79.$

Đại học Sư phạm Hà Nội 2 năm 2000

Giải

Ta có : $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{n!}{(n-1)!}+\frac{n!}{2!(n-2)!}=79 \Leftrightarrow n+\frac{n(n-1)}{2}=78$$

$$\Leftrightarrow n^2+n-156=0 \Leftrightarrow n=-13 \vee n=12$$

Do $n \in N$ nên $n = 12$.

Ta có : $\left(x\sqrt[3]{x}+x^{-\frac{28}{15}}\right)^{12} = \left(x^{\frac{4}{3}}+x^{-\frac{28}{15}}\right)^{12}$

$$= \sum_{i=0}^{12} C_{12}^i\left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{12-i}.x^{-\frac{28}{15}i} = \sum_{i=0}^{12} C_{12}^i x^{16-\frac{16}{5}i}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 16-\frac{16}{5}i=0 \Leftrightarrow i=5$

Vậy số hạng cần tìm $C_{12}^5 = \frac{12!}{5!7!} = 792.$ ■

Bài 133. Trong khai triển sau đây có bao nhiêu số hạng hữu tỉ :

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt[4]{5}\right)^{124}.$$

Giải

Ta có : $\left(\sqrt{3}-\sqrt[4]{5}\right)^{124} = \left(3^{\frac{1}{2}}-5^{\frac{1}{4}}\right)^{124} = \sum_{k=0}^{124} C_{124}^{k}\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{124-k}.(-5^{\frac{1}{4}})^{k}$

$$= \sum_{k=0}^{124}(-1)^{k}C_{124}^{k}3^{62-\frac{k}{2}}.5^{\frac{k}{4}}$$

Số hạng thứ k là hữu tỉ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 62-\frac{k}{2}\in N \\ \frac{k}{4}\in N \\ k\in N \\ 0\le k\le 124 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k\in N \\ 0\le k\le 124 \\ \frac{k}{2}\in N \\ \frac{k}{4}\in N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i,k\in N \\ 0\le k\le 124 \\ k=4i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i\in N \\ 0\le i\le 31 \\ k=4i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad i\in\{0, 1, ..., 31\}$$

Do đó trong khai triển trên có 32 số hạng hữu tỉ. ■

Bài 134*. Gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của

$$(x^2+1)^n.(x+2)^n.$$

Tìm n để $a_{3n-3} = 26n$.

Tuyển sinh Đại học khối D 2003

Giải

Ta có : $(x^2+1)^n.(x+2)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i (x^2)^{n-i}.\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k}.2^k$

$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} C_n^i C_n^k 2^k.x^{3n-2i-k}$$

Do yêu cầu bài toán nên $\quad 3n-3 = 3n-(2i+k)$

$$\Rightarrow \quad 2i+k=3$$

Do $i, k \in N$ và $i, k \in [0, n]$ nên $\begin{cases} i=0 \\ k=3 \end{cases}$ hay $\begin{cases} i=1 \\ k=1 \end{cases}$

Vậy $a_{3n-3} = C_n^0 C_n^3 2^3 + C_n^1 C_n^1 2^1 = 26n$

$$\Leftrightarrow \quad 8.\frac{n!}{3!(n-3)!} + 2n^2 = 26n$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4}{3}n(n-1)(n-2) + 2n^2 = 26n$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(n-1)(n-2) + 3n = 39 \quad \Leftrightarrow \quad 2n^2 - 3n - 35 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad n = 5 \vee n = -\frac{7}{2} \text{ (loại do } n \in N) \quad \Leftrightarrow \quad n = 5. \quad \blacksquare$$

Bài 135*. Trong khai triển $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10}$ thành đa thức

$$a_0 + a_1x + \ldots + a_9x^9 + a_{10}x^{10} \quad (a_k \in R)$$

Hãy tìm số hạng a_k lớn nhất.

Đại học Sư phạm Hà Nội 2001

Giải

Ta có : $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10} = \frac{1}{3^{10}}(1+2x)^{10} = \frac{1}{3^{10}}\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (2x)^k$

Do đó : $a_k = \frac{1}{3^{10}} C_{10}^k 2^k$

Ta có : a_k max $\Leftrightarrow \begin{cases} a_k \geq a_{k-1} \\ a_k \geq a_{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{10}^k 2^k \geq C_{10}^{k-1} 2^{k-1} \\ C_{10}^k 2^k \geq C_{10}^{k+1} 2^{k+1} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2^k 10!}{k!(10-k)!} \geq \dfrac{2^{k-1}.10!}{(k-1)!(11-k)!} \\ \dfrac{2^k 10!}{k!(10-k)!} \geq \dfrac{2^{k+1}.10!}{(k+1)!(9-k)!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{k} \geq \dfrac{1}{11-k} \\ \dfrac{1}{10-k} \geq \dfrac{2}{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{19}{3} \leq k \leq \frac{22}{3}$$

Do $k \in N$ và $k \in [0, 10]$ nên $k = 7$

Vậy a_k max $= a_7 = \frac{2^7}{3^{10}} C_{10}^7$. $\blacksquare$

Dạng 2.

ĐẠO HÀM HAI VẾ CỦA KHAI TRIỂN NEWTON ĐỂ CHỨNG MINH MỘT ĐẲNG THỨC

- Viết khai triển Newton của $(ax + b)^n$.
- Đạo hàm 2 vế một số lần thích hợp.
- Chọn giá trị x sao cho thay vào ta được đẳng thức phải chứng minh.

Chú ý :

- Khi cần chứng minh đẳng thức chứa kC_n^k ta đạo hàm hai vế trong khai triển $(a + x)^n$.
- Khi cần chứng minh đẳng thức chứa $k(k-1)C_n^k$ ta đạo hàm 2 lần hai vế của khai triển $(a + x)^n$.

Bài 136. Chứng minh :

a) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n = n2^{n-1}$

b) $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - ... + (-1)^{n-1}nC_n^n = 0$

c) $2^{n-1}C_n^1 - 2^{n-1}C_n^2 + 3.2^{n-3}C_n^3 - ... + (-1)^{n-1}nC_n^n = n$.

Giải

Ta có nhị thức

$$(a + x)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}x + C_n^2a^{n-2}x^2 + ... + C_n^nx^n.$$

Đạo hàm 2 vế ta được :

$$n(a + x)^{n-1} = C_n^1a^{n-1} + 2C_n^2a^{n-2}x + 3C_n^3a^{n-3}x^2 + ... + nC_n^nx^{n-1}$$

a) Với a = 1, x = 1, ta được :

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n = n2^{n-1}$$

b) Với a = 1, x = –1, ta được :

$$C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - ... + (-1)^{n-1}nC_n^n = 0$$

c) Với a = 2, x = –1, ta được :

$$2^{n-1}C_n^1 - 2^{n-1}C_n^2 + 3.2^{n-3}C_n^3 - ... + (-1)^{n-1}nC_n^n = n.$$ ■

Bài 137. Cho $(x-2)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{100}x^{100}$. Tính :

a) a_{97}

b) $S = a_0 + a_1 + ... + a_{100}$

c) $M = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + ... + 100a_{100}$

Đại học Hàng hải 1998

Giải

Ta có :

$(x-2)^{100} = (2-x)^{100}$

$$= C_{100}^0 2^{100} - C_{100}^1 2^{99}.x + ... + C_{100}^k 2^{100-k}(-x)^k + ... + C_{100}^{100}x^{100}$$

a) Ứng với k = 97 ta được a_{97}.

Vậy $a_{97} = C_{100}^{97}2^3(-1)^{97}$

$$= -8.\frac{100!}{3!97!} = \frac{-8\times100\times99\times98}{6} = -1\,293\,600$$

b) Đặt $f(x) = (x-2)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{100}x^{100}$

Chọn x = 1 ta được

$$S = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{100} = (-1)^{100} = 1.$$

c) Ta có : $f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + 100a_{100}x^{99}$

Mặt khác $f(x) = (x-2)^{100}$

$\Rightarrow f'(x) = 100(x-2)^{99}$

Vậy $100(x-2)^{99} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + 100a_{100}x^{99}$

Chọn x = 1 ta được

$$M = a_1 + 2a_2 + ... + 100a_{100} = 100(-1)^{99} = -100. \blacksquare$$

Bài 138. Cho $f(x) = (1+x)^n$ với $n \geq 2$.

a) Tính f''(1)

b) Chứng minh

$$2.1.C_n^2 + 3.2.C_n^3 + 4.3.C_n^4 + ... + n(n-1)C_n^n = n(n-1)2^{n-2}.$$

Đại học An ninh 1998

Giải

a) Ta có : $f(x) = (1+x)^n$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = n(1+x)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$$

Vậy $\quad f''(1) = n(n-1)2^{n-2}$.

b) Do khai triển nhị thức Newton

$$f(x) = (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + C_n^4x^4 + \ldots + C_n^nx^n$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2xC_n^2 + 3x^2C_n^3 + 4x^3C_n^4 + \ldots + nx^{n-1}C_n^n$$

$$\Rightarrow \quad f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} = 2C_n^2 + 6xC_n^3 + 12x^2C_n^4 + \ldots + n(n-1)x^{n-2}C_n^n$$

Chọn $x = 1$ ta được

$$n(n-1)2^{n-2} = 2C_n^2 + 6C_n^3 + 12C_n^4 + \ldots + n(n-1)C_n^n. \quad ■$$

Bài 139. Chứng minh

$$2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-1}C_n^2 + 3.2^{n-3}C_n^3 + 4.2^{n-4}C_n^4 + \ldots + nC_n^n = n3^{n-1}.$$

Đại học Kinh tế Quốc dân 2000

Giải

Ta có :

$$(2+x)^n = C_n^0 2^n + C_n^1 2^{n-1}x + C_n^2 2^{n-2}x^2 + C_n^3 2^{n-3}x^3 + \ldots + C_n^nx^n$$

Đạo hàm 2 vế ta được

$$n(2+x)^{n-1} = C_n^1 2^{n-1} + 2xC_n^2 2^{n-2} + 3x^2C_n^3 2^{n-3} + \ldots + nx^{n-1}C_n^n$$

Chọn $x = 1$ ta được

$$n3^{n-1} = 2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-1}C_n^2 + 3C_n^3 2^{n-3} + \ldots + nC_n^n. \quad ■$$

Bài 140. Chứng minh $C_n^1 3^{n-1} + 2C_n^2 3^{n-2} + 3C_n^3 3^{n-3} + \ldots + nC_n^n = n4^{n-1}$.

Đại học Luật 2001

Giải

Ta có :

$$(3+x)^n = C_n^0 3^n + C_n^1 3^{n-1}x + C_n^2 3^{n-2}x^2 + C_n^3 3^{n-3}x^3 + \ldots + C_n^nx^n$$

Đạo hàm 2 vế ta được

$$n(3+x)^{n-1} = C_n^1 3^{n-1} + 2xC_n^2 3^{n-2} + 3x^2C_n^3 3^{n-3} + \ldots + nC_n^nx^{n-1}$$

Chọn $x = 1$

$$\Rightarrow \quad n4^{n-1} = C_n^1 3^{n-1} + 2C_n^2 3^{n-2} + 3C_n^3 3^{n-3} + \ldots + nC_n^n.$$

Bài 141. Tính $A = C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - 4C_n^4 + ... + (-1)^{n-1}nC_n^n$.

Đại học Bách khoa Hà Nội 1999

Giải

Ta có :

$$(1 - x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - C_n^3 x^3 + ... + (-1)^n C_n^n x^n$$

Lấy đạo hàm hai vế ta được

$$-n(1 - x)^{n-1} = -C_n^1 + 2xC_n^2 - 3x^2C_n^3 + ... + (-1)^n nC_n^n x^{n-1}$$

Chọn x = 1 ta có :

$$0 = -C_n^1 + 2C_n^2 - 3C_n^3 + ... + (-1)^n nC_n^n$$

$$\Leftrightarrow \quad A = C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + (-1)^{n-1}nC_n^n = 0. \quad ■$$

Bài 142. Chứng minh với $n \in N$ và $n > 2$

$$\frac{1}{n}(C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n) < n! \quad (*)$$

Giải

Ta có : $(1 + x)^n = C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + ... + x^nC_n^n$

Lấy đạo hàm theo x hai vế ta được :

$$n(1 + x)^{n-1} = C_n^1 + 2xC_n^2 + ... + nx^{n-1}C_n^n$$

Chọn x = 1 ta được

$$n2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + ... + nC_n^n$$

Vậy (*) $\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n}(n.2^{n-1}) < n! \quad \Leftrightarrow \quad 2^{n-1} < n! \quad (**)$

Kết quả (**) sẽ được chứng minh bằng qui nạp

(**) đúng khi n = 3. Thật vậy $4 = 2^2 < 3! = 6$

Giả sử (**) đúng khi n = k với k > 3 nghĩa là ta đã có : $k! > 2^{k-1}$

Vậy $\quad (k + 1)k! > (k + 1)2^{k-1}$

$\Leftrightarrow \quad (k + 1)! > 2.2^{k-1} = 2^k$ (do k > 3 nên k + 1 > 4)

Do đó (**) đúng khi n = k + 1.

Kết luận : $2^{n-1} < n!$ đúng với $\forall n \in N$ và $n > 2$. ■

Bài 143. Chứng minh :

a) $1.2C_n^2 + 2.3C_n^3 + ... + (n-1)nC_n^n = n(n-1)2^{n-2}$

b) $1.2C_n^2 - 2.3C_n^3 + ... + (-1)^{n-2}(n-1)nC_n^n = 0$

c) $2^{n-1}C_n^2 + 3.2^{n-2}C_n^3 + 3.4.2^{n-4}C_n^4 + ... + (n-1)nC_n^n = n(n-1)3^{n-2}$

d) $2^{n-1}C_n^2 - 3.2^{n-2}C_n^3 + 3.4.2^{n-4}C_n^4 - ... + (-1)^{n-2}(n-1)nC_n^n = n(n-1)$.

Giải

Ta có nhị thức

$$(a+x)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}x + C_n^2a^{n-2}x^2 + ... + C_n^nx^n.$$

Đạo hàm 2 vế 2 lần, ta được :

$$n(n-1)(a+x)^{n-2} = 1.2C_n^2a^{n-2} + 2.3C_n^3a^{n-3}x + ... + (n-1)nC_n^nx^{n-2}$$

a) Với a = 1, x = 1, ta được :

$$1.2C_n^2 + 2.3C_n^3 + ... + (n-1)nC_n^n = n(n-1)2^{n-2}$$

b) Với a = 1, x = −1, ta được :

$$1.2C_n^2 - 2.3C_n^3 + ... + (-1)^{n-2}(n-1)nC_n^n = 0$$

c) Với a = 2, x = 1, ta được :

$$1.2.2^{n-2}C_n^2 + 2.3.2^{n-3}C_n^3 + ... + (n-1)nC_n^n = n(n-1)3^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow 2^{n-1}C_n^2 + 3.2^{n-2}C_n^3 + 3.4.2^{n-4}C_n^4 + ... + (n-1)nC_n^n = n(n-1)3^{n-2}$$

d) Với a = 2, x = −1, ta được :

$$1.2.2^{n-2}C_n^2 - 2.3.2^{n-3}C_n^3 + 3.4.2^{n-4}C_n^4 - ... + (-1)^{n-2}(n-1)nC_n^n = n(n-1)$$

$$\Leftrightarrow 2^{n-1}C_n^2 - 3.2^{n-2}C_n^3 + 3.4.2^{n-4}C_n^4 - ... + (-1)^{n-2}(n-1)nC_n^n = n(n-1).$$ ∎

Bài 144. Chứng minh :

a) $3C_n^0 + 4C_n^1 + ... + (n+3)C_n^n = 2^{n-1}(6+n)$.

b) $3C_n^0 - 4C_n^1 + ... + (-1)^n(n+3)C_n^n = 0$.

Giải

Ta có nhị thức $(a + x)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + ... + C_n^n x^n$.

Nhân 2 vế với x^3, ta được :

$$x^3(a + x)^n = C_n^0 a^n x^3 + C_n^1 a^{n-1} x^4 + C_n^2 a^{n-2} x^5 + ... + C_n^n x^{n+3}.$$

Đạo hàm 2 vế, ta được :

$$3x^2(a + x)^n + nx^3(a + x)^{n-1} = 3C_n^0 a^n x^2 + 4C_n^1 a^{n-1} x^3 + ... + (n + 3)C_n^n x^{n+2}.$$

a) Với a = 1, x = 1, ta được :

$$3C_n^0 + 4C_n^1 + ... + (n + 3)C_n^n = 3.2^n + n2^{n-1} = 2^{n-1}(6 + n).$$

b) Với a = 1, x = –1, ta được :

$$3C_n^0 - 4C_n^1 + ... + (-1)^n(n + 3)C_n^n = 0.$$ ■

Dạng 3.

TÍCH PHÂN HAI VẾ CỦA NHỊ THỨC NEWTON ĐỂ CHỨNG MINH MỘT ĐẲNG THỨC

+ Viết khai triển Newton của $(ax + b)^n$.
+ Lấy tích phân xác định hai vế thường là trên các đoạn : [0, 1], [0, 2] hay [1, 2] ta sẽ được đẳng thức cần chứng minh.

Chú ý :

- Cần chứng minh đẳng thức $\frac{C_n^k}{k+1}$ ta lấy tích phân với cận thích hợp hai vế trong khai triển của $(a + x)^n$.
- Cần chứng minh đẳng thức chứa $\frac{1}{k+m+1}C_n^k$ ta lấy tích phân với cận thích hợp hai vế trong khai triển của $x^m(a + x)^n$.

Bài 145. Cho $n \in N$ và $n \geq 2$.

a) Tính $I = \int_0^1 x^2(1 + x^3)^n dx$

b) Chứng minh : $\frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{6}C_n^1 + \frac{1}{9}C_n^2 + ... + \frac{1}{3(n+1)}C_n^n = \frac{2^{n+1} - 1}{3(n+1)}$.

Đại học Mở 1999

Giải

a) Ta có : $I = \int_0^1 x^2(1+x^3)^n dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (1+x^3)^n d(x^3+1)$

$$I = \frac{1}{3}\cdot\frac{(1+x^3)^{n+1}}{n+1}\Bigg]_0^1 = \frac{1}{3(n+1)}\left[2^{n+1}-1\right].$$

b) Ta có : $(1+x^3)^n = C_n^0 + C_n^1x^3 + C_n^2x^6 + \ldots + C_n^nx^{3n}$

$\Rightarrow \quad x^2(1+x^3)^n = x^2C_n^0 + x^5C_n^1 + x^8C_n^2 + \ldots + x^{3n+2}C_n^n$

Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế ta được :

$$I = \left[\frac{x^3}{3}C_n^0 + \frac{x^6}{6}C_n^1 + \frac{x^9}{9}C_n^2 + \ldots + \frac{x^{3n+3}}{3n+3}\right]_0^1$$

Vậy : $\frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)} = \frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{6}C_n^1 + \frac{1}{9}C_n^2 + \ldots + \frac{1}{3n+3}C_{n_0}^n$. ■

Bài 146. Chứng minh $\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Đại học Giao thông Vận tải 2000

Giải

Ta có : $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \ldots + C_n^nx^n$

Vậy $\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 \left(C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \ldots + C_n^nx^n\right)dx$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \left[C_n^0x + C_n^1\frac{x^2}{2} + C_n^2\frac{x^3}{3} + \ldots + C_n^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{n+1}-1}{n+1} = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}.$$ ■

Bài 147. Tính : $C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$.

Tuyển sinh Đại học khối B 2003

Giải

Ta có : $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + ... + C_n^nx^n$

Vậy $\int_1^2 (1+x)^n dx = \int_1^2 \left(C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + ... + C_n^nx^n\right)dx$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_1^2 = \left[C_n^0x + C_n^1\frac{x^2}{2} + C_n^2\frac{x^3}{3} + C_n^3\frac{x^4}{4} + ... + C_n^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_1^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{n+1}}{n+1} - \frac{2^{n+1}}{n+1} = C_n^0[x]_1^2 + \frac{1}{2}C_n^1\left[x^2\right]_1^2 + \frac{1}{3}C_n^2\left[x^3\right]_1^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n\left[x^{n+1}\right]_1^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1} = C_n^0 + C_n^1\frac{2^2-1}{2} + C_n^2\frac{2^3-1}{3} + ... + C_n^n\frac{2^{n+1}-1}{n+1}. \quad \blacksquare$$

Bài 148. Chứng minh :

$$2C_n^0 - \frac{1}{2}2^2.C_n^1 + \frac{1}{3}2^3.C_n^2 + ... + \frac{(-1)^n}{n+1}2^{n+1}C_n^n = \frac{1+(-1)^n}{n+1}.$$

Đại học Giao thông Vận tải 1996

Giải

Ta có : $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + (-1)^nC_n^nx^n$

Vậy $\int_0^2 (1-x)^n dx = \int_0^2 \left(C_n^0 - C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + (-1)^nC_n^nx^n\right)dx$

$$\Leftrightarrow \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^2 = \left[C_n^0x - \frac{1}{2}x^2C_n^1 + \frac{x^3}{3}C_n^2 + ... + \frac{(-1)^nx^{n+1}}{n+1}C_n^n\right]_0^2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1} = 2C_n^0 - \frac{2^2}{2}C_n^1 + \frac{2^3}{3}C_n^2 + ... + \frac{(-1)^n.2^{n+1}}{n+1}C_n^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+(-1)^n}{n+1} = 2C_n^0 - \frac{2^2}{2}C_n^1 + \frac{2^3}{3}C_n^2 + ... + \frac{(-1)^n.2^{n+1}}{n+1}C_n^n. \quad \blacksquare$$

Bài 149. Chứng minh :

a) $(-1)^nC_n^0 + (-1)^{n-1}\frac{1}{2}C_n^1 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$

b) $C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + ... + (-1)^n\frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1}.$

Giải

Ta có nhị thức

$$(a+x)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}x + C_n^2a^{n-2}x^2 + \dots + C_n^nx^n.$$

Vậy : $\int_0^1 (a+x)^n dx = \int_0^1 \left(C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}x + \dots + C_n^nx^n\right)dx$

$$\Leftrightarrow \quad \left.\frac{(a+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \left(C_n^0a^nx + \frac{1}{2}C_n^1a^{n-1}x^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^nx^{n+1}\right)\Bigg|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(a+1)^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} = C_n^0a^n + \frac{1}{2}C_n^1a^{n-1} + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n.$$

a) Với a = −1, ta được :

$$(-1)^nC_n^0 + (-1)^{n-1}\frac{1}{2}C_n^1 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{-(-1)^{n+1}}{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

b) Ta có nhị thức

$$(a+x)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}x + C_n^2a^{n-2}x^2 + \dots + C_n^nx^n.$$

Vậy $\int_0^{-1} (a+x)^n dx = \int_0^{-1} \left(C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}x + \dots + C_n^nx^n\right)dx$

$$\Leftrightarrow \quad \left.\frac{(a+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^{-1} = \left(C_n^0a^nx + \frac{1}{2}C_n^1a^{n-1}x^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^nx^{n+1}\right)\Bigg|_0^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(a-1)^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} = -C_n^0a^n + \frac{1}{2}C_n^1a^{n-1} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}C_n^n.$$

Với a = 1, ta được :

$$-C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 - \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{-1}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \dots + (-1)^n\frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1}. \quad \blacksquare$$

Bài 150. Tính $\int_0^1 x(1-x)^{19}dx$

Rút gọn $S = \frac{1}{2}C_{19}^0 - \frac{1}{3}C_{19}^1 + \frac{1}{4}C_{19}^2 + \dots + \frac{1}{20}C_{19}^{18} - \frac{1}{21}C_{19}^{19}$.

Đại học Nông nghiệp Hà Nội 1999

Giải

- Đặt $t = 1 - x \Rightarrow dt = -dx$

Đổi cận

x	0	1
t	1	0

Vậy $I = \int_0^1 x(1-x)^{19}dx = \int_1^0 (1-t)t^{19}(-dt)$

$$\Leftrightarrow \quad I = \int_0^1 (t^{19} - t^{20})dt = \left.\frac{1}{20}t^{20} - \frac{1}{21}t^{21}\right]_0^1 = \frac{1}{20} - \frac{1}{21} = \frac{1}{420}$$

- Ta có : $(1-x)^{19} = C_{19}^0 - C_{19}^1 x + C_{19}^2 x^2 + \ldots + C_{19}^{18}x^{18} - C_{19}^{19}x^{19}$

$$\Rightarrow \quad x(1-x)^{19} = xC_{19}^0 - C_{19}^1 x^2 + C_{19}^2 x^3 + \ldots + C_{19}^{18}x^{19} - C_{19}^{19}x^{20}$$

Vậy $I = \int_0^1 x(1-x)^{19}dx = \left[\frac{x^2}{2}C_{19}^0 - \frac{x^3}{3}C_{19}^1 + \ldots + \frac{x^{20}}{20}C_{19}^{18} - \frac{x^{21}}{21}C_{19}^{19}\right]_0^1$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{420} = \frac{1}{2}C_{19}^0 - \frac{1}{3}C_{19}^1 + \ldots + \frac{1}{20}C_{19}^{18} - \frac{1}{21}C_{19}^{19}$$

Vậy $S = \frac{1}{420}$. ■

Bài 151.

a) Tính $\int_0^1 x(1-x^2)^n dx$

b) Chứng minh $\frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 - \frac{1}{8}C_n^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+2}C_n^n = \frac{1}{2(n+1)}$.

Đại học Bách khoa Hà Nội 1997

Giải

a) Ta có : $I = \int_0^1 x(1-x^2)^n dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)^n d(1-x^2)$

$$\Leftrightarrow \quad I = -\frac{1}{2}\left[\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{2(n+1)}\left[0 - 1^{n+1}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad I = \frac{1}{2(n+1)}.$$

b) Ta có :

$$(1-x^2)^n = C_n^0 - C_n^1x^2 + C_n^2x^4 - C_n^3x^6 + ... + (-1)^n C_n^n x^{2n}$$

$$\Rightarrow \quad x(1-x^2)^n = xC_n^0 - C_n^1x^3 + C_n^2x^5 - C_n^3x^7 + ... + (-1)^n C_n^n x^{2n+1}$$

Vậy $I = \int_0^1 x(1-x^2)^n dx = \left[\frac{x^2}{2}C_n^0 - \frac{x^4}{4}C_n^1 + \frac{x^6}{6}C_n^2 - \frac{x^8}{8}C_n^3 + ... + \frac{(-1)^n}{2n+2}x^{2n+2}C_n^n\right]_0^1$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 - \frac{1}{8}C_n^3 + ... + \frac{(-1)^n}{2n+2}C_n^n. \quad ■$$

Bài 152*. Chứng minh :

$$\frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{4}C_n^1 + ... + \frac{1}{n+3}C_n^n = \frac{2^{n+1}(n^2+n+2)-2}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Giải

a) Ta có nhị thức

$$(a+x)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}x + ... + C_n^nx^n.$$

Suy ra : $x^2(a+x)^n = C_n^0a^nx^2 + C_n^1a^{n-1}x^3 + ... + C_n^nx^{n+2}$

Vậy $\int_0^1 x^2(a+x)^n dx = \int_0^1 \left(C_n^0a^nx^2 + C_n^1a^{n-1}x^3 + ... + C_n^nx^{n+2}\right)dx$

$$= \frac{1}{3}C_n^0a^n + \frac{1}{4}C_n^1a^{n-1} + ... + \frac{1}{n+3}C_n^n$$

Để tính tích phân ở vế trái, đặt $t = a + x \Rightarrow dt = dx$

Đổi cận :

x	0	1
t	a	a + 1

Suy ra :

$$\int_0^1 x^2(a+x)^n dx = \int_a^{a+1}(t-a)^2t^n dt$$

$$= \int_a^{a+1}\left(t^{n+2} - 2at^{n+1} + a^2t^n\right)dt = \left(\frac{t^{n+3}}{n+3} - \frac{2at^{n+2}}{n+2} + \frac{a^2t^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_a^{a+1}$$

$$= \frac{(a+1)^{n+3} - a^{n+3}}{n+3} - \frac{2a\left[(a+1)^{n+2} - a^{n+2}\right]}{n+2} + \frac{a^2\left[(a+1)^{n+1} - a^{m+1}\right]}{n+1}$$

Với a = 1, ta được :

$$\int_0^1 x^2(a+x)^n dx = \frac{2^{n+3}-1}{n+3} - \frac{2(2^{n+2}-1)}{n+2} + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

$$= 2^{n+1}\left(\frac{4}{n+3} - \frac{4}{n+2} + \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{2}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 2^{n+1}\frac{n^2+n+2}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{2^{n+1}(n^2+n+2)-2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Suy ra : $\frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{4}C_n^1 + ... + \frac{1}{n+3}C_n^n = \frac{2^{n+1}(n^2+n+2)-2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$. ■

BÀI TẬP

1 Tính tổng :

$$S = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + 2^3C_5^3 + 2^4C_5^4 + 2C^5C_5^5$$

2 Trong khai triển của :

$\left(2x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^{10}$ với $x \neq 0$. Hãy tìm số hạng phụ thuộc x.

Cao đẳng Sư phạm Kỹ thuật 2000

3 Xét khai triển :

$\left(x^2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$ với $x \neq 0$. Biết rằng hệ số của số hạng thứ 3 bằng 36. Tính số hạng thứ 7.

4 Viết lại $P(x) = (1+x) + 2(1+x)^2 + ... + 20(1+x)^{20}$ dưới dạng

$P(x) = a_0 + a_1 + ... + a_{20}x^{20}$. Tìm a_{15}.

Học viện Kỹ thuật Quân sự 1997

5 Tìm số hạng hữu tỉ của khai triển :

$$\left(\sqrt{3} - \sqrt{15}\right)^6$$

6 Tìm số hạng đứng giữa của khai triển

$$\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}} + \sqrt[3]{x}\right)^{10}.$$

7 Chứng minh :

$$2^n = 3^n\left[C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{3^2}C_n^2 + ... + (-1)^n\frac{1}{3^n}C_n^n\right].$$

Đại học Mở 1997

8 Cho $P(x) = (1 + x)^9 + (1 + x)^{10} + ... + (1 + x)^{14}$

có dạng khai triển là $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{14}x^{14}$. Tính a_9.

Đại học Thủy lợi 2000

9 Chứng minh : $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + ... + C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}$.

10 Tính hệ số của $x^{25}y^{10}$ trong khai triển $(x^3 + xy)^{15}$.

Đại học Đà Lạt 1999

11 Cho $P(x) = (1 + 2x + 3x^2)^{10}$.

a) Tính $I = \int_0^1 (1 + 3x)P(x)dx$.

b) Tìm hệ số của x_3 trong khai triển P(x).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Các đề thi tuyển sinh Đại học và Cao đẳng của VN từ 1997 đến 2004

[2] Seymour Lipschutz & John J. Schiller
Finite Mathematics, McGraw – Hill 1995

[3] Ian Anderson, A First Course in Combinatorial
Mathematics, Clarendon Press Oxford, 1974

[4] Hà văn Chương, Đại số tổ hợp, NXB Hải Phòng 2001.

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: PHẠM THÀNH HƯNG

Biên tập: NGUYỄN VĂN TRỌNG

Trình bày bìa: VÕ THỊ THỪA

BÀI TẬP TOÁN ĐẠI SỐ TỔ HỢP

Mã số: 1L- 43ĐH2005

In 2000 cuốn, khổ 16x24 tại Xưởng in Công ty phát triển Công nghệ Truyền hình TPHCM

Số xuất bản: 18/751/XB-QLXB; ngày19/5/2005

Số trích ngang: 215 KH/XB

In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2005